

**WIRKUNG DES GLUONENKONDENSATS
AUF EIN BINDUNGSSYSTEM
VON SCHWEREN QUARK UND ANTIQUARK**

von

Reinhard Meckbach

*Liss
München
1984*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554009_0078

WIRKUNG DES GLUONENKONDENSATS AUF EIN BINDUNGSSYSTEM
VON SCHWEREN QUARK UND ANTIQUARK

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Reinhard Meckbach
aus Bad Soden/Taunus

München, den 12. April 1984

1. Gutachter: Professor Dr. F. Wagner
2. Gutachter: Professor Dr. H. Fritzsch

Tag der mündlichen Prüfung: 27. 7. 1984

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird die Wirkung nichtstörungstheoretischer gluonischer Fluktuationen im quantenchromodynamischen Grundzustand - des sogenannten Gluonenkondensats - auf ein Bindungssystem von schweren Quark und Antiquark untersucht.

In einem ersten Teil wird zunächst eine Übersicht der theoretischen Grundbegriffe gegeben, die in der Arbeit verwendet werden. Die nichttriviale Struktur des QCD-Grundzustandes wird hervorgehoben und dargelegt, daß daraus ein nichtverschwindender Vakuumerwartungswert $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ folgt. Dessen Bestimmung über die QCD-Summenregeln aus dem Charm-Wirkungsquerschnitt bei e^+e^- -Annihilation wird kurz erläutert.

Im zweiten Teil der Arbeit wird untersucht, wie das Gluonenkondensat einen coulombartigen Bindungszustand von schweren Quark und Antiquark modifiziert. Es wird eine dynamische Gleichung abgeleitet, die die Zeitentwicklung des Systems in Abhängigkeit von $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ beschreibt. Aus der Lösung dieser Gleichung im statischen Grenzfall wird die statische Energie des Quark-Antiquark-Systems in Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat bestimmt. Bis zu einem Abstand von 0,4 fm. stimmt das für die statische Energie erzielte Ergebnis gut mit den phenomenologischen Potentialen der Charmonium- und Bottomoniumsysteme überein.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	I
Erster Teil: GRUNDLAGEN	6
1. Allgemeine Bemerkungen zur Quantenchromodynamik	6
2. Gluonenkondensat und QCD-Summenregeln	13
Zweiter Teil: SCHWERES QUARK-ANTIQUARK-SYSTEM UND GLUONENKONDENSAT	20
3. Zustandsraum und Hamiltonoperator	20
4. Die Zeitentwicklung	26
5. Der Integralkern	31
6. Die statische Energie	36
7. Die statische Energie als Potential	52
8. Zusammenfassung der Ergebnisse	60
Anhang A	62
Anhang B	64
Anhang C	72
Anhang D	72
Anhang E	74
Anhang F	75
Literaturverzeichnis	77



EINLEITUNG

Die Quantenchromodynamik (QCD)⁽¹⁾, die nichtabelsche Color SU(3) Eichtheorie von Quarks und Gluonen, wird allgemein als erfolgreicher Versuch zu einer feldtheoretischen Formulierung der starken Wechselwirkungen anerkannt. In dieser renormierbaren Quantenfeldtheorie findet man die für das Verständnis der Physik der Hadronen notwendigen Attribute. Folgende seien insbesondere hervorgehoben:

- In der QCD sind die Symmetrien bzw. annähernde Symmetrien der starken Wechselwirkungen verwirklicht.
- Die QCD ist asymptotisch frei⁽²⁾. Ihre effektive Kopplung wird klein bei hinreichend kleinen Abständen. Diese Eigenschaft erklärt die Skaleninvarianz - bzw. annähernde Skaleninvarianz - bei der tiefinelastischen Lepton-Nukleon Streuung und bei der hochenergetischen e^+e^- -Annihilation.
- Die asymptotische Freiheit erlaubt eine semiquantitative Anwendung der Störungsrechnung auf harte Streuprozesse⁽³⁾. Insbesondere kann mit störungstheoretischen Methoden eine Berechnung der hadronischen Quark- und Gluon-Jets durchgeführt werden.
- Es besteht eine begründete Hoffnung, daß wegen des nichtabelschen Charakters der QCD sich eine dynamische Erklärung des Confinements von Quarks ergibt. Darauf deuten insbesondere die bei einer Formulierung der QCD auf einem Raum-Zeit Gitter (Gitter-QCD) gewonnenen Ergebnisse hin⁽⁴⁾.
- Die QCD ist verträglich mit den Resultaten der Stromalgebra⁽⁵⁾ und mit phenomenologischen Modellen (Quarkmodelle⁽⁶⁾, Bag Modell⁽⁷⁾, Potentialmodelle⁽⁸⁾), die mit einigem Erfolg verschiedene Aspekte der Hadronenstruktur beschreiben.

Allerdings entziehen sich noch viele Aspekte der starken Wechselwirkungen einer direkten Beschreibung durch die QCD. Insbesondere ist die Ableitung des Hadronenspektrums aus der QCD eine noch weitgehend ungelöste Frage^{*}). Die QCD ist bei den dem Durchmesser der Hadronen entsprechenden Abständen eine Theorie mit starker Kopplung. Demzufolge werden störungstheoretisch Methoden für eine Bestimmung des Hadronenspektrums nicht ausreichen.

*) Fortschritte⁽⁴⁾ wurden in jüngster Zeit mit den Methoden der Gitter-QCD erzielt.

Nur für sehr schwere Quarks ist ein störungstheoretischer Zugang konsistent. Er führt zu einem positroniumartigen Bild der Quark-Antiquark Bindungszustände⁽⁹⁾, in dem Quark und Antiquark über ein Coulomb-artiges Potential miteinander wechselwirken. Aber die experimentelle Information über die bislang entdeckten Bindungszustände schwerer Quarks (Charmonium und Bottonium)⁽¹⁰⁾ zeigt, daß dieser Zugang für nicht hinreichend schwere Quarks versagt und durch nichtstörungstheoretische Effekte modifiziert werden muß.

Es wird allgemein angenommen, daß der Grundzustand der QCD langreichweitige Fluktuationen des Gluonenfeldes enthält, die nicht mit störungstheoretischen Methoden beschrieben werden können^(11,12). Es besteht dann ein Interesse an der Untersuchung des Einflusses dieser als Gluonenkondensat bezeichneten Vakuumsfluktuationen auf die Dynamik der Bindungszustände schwerer Quarks^(12-14,16-20).

Wenn auch das theoretische Verständnis des Gluonenkondensats noch recht unvollkommen ist, kann darüber eine gewisse phenomenologische Information durch Verwendung der von Shifman, Vainshtein und Zakharov⁽¹²⁾ vorgeschlagenen QCD-Summenregeln gewonnen werden. In diesem Zugang wird in einer Operatorproduktentwicklung die Wirkung des Gluonenkondensats durch die Vakuumserwartungswerte von aus Gluonenfeldoperatoren zusammengesetzten lokalen Operatoren parametrisiert. Die QCD-Summenregeln stellen dann eine Beziehung zwischen dem totalen Charm-Wirkungsquerschnitt bei e^+e^- -Annihilation und diesen Parametern her, die dadurch aus den experimentellen Daten bestimmt werden können. So erhält man für den führenden Parameter niedrigster Dimension^(12,13) (wir geben hier den in (13) gefundenen Wert an)

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle = 0,014 \text{ GeV}^4$$

wobei $G_{\mu\nu}^a$ der Gluonenfeldstärketensor ist. Mit der in diesem Parameter enthaltenen Information über das Gluonenkondensat fanden die QCD-Summenregeln eine weit verbreitete Anwendung^(12,14). Insbesondere wurden sie mit Erfolg für die Vorhersage der Massen der Bindungszustände niedrigster Energie des Charmoniumsystems verwendet⁽¹⁴⁾.

Andererseits werden die Charmonium- und Bottomonium-Systeme erfolgreich im Rahmen phenomenologischer Potentialmodelle^(8,15) beschrieben. Es ist somit eine interessante Problemstellung, den Zusammenhang zwischen beiden Zugängen zu untersuchen⁽¹⁶⁻¹⁸⁾. Insbesondere hat Flory⁽¹⁷⁾, nach einer Reihe von Näherungen, ein statisches Potential abgeleitet welches, ausgedrückt durch den Gluonenkondensatparameter $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$, in erstaunlicher Weise mit den phenomenologischen Potentialen bis zu Quark-Antiquark Abständen von 1,0 fm übereinstimmt.

Die Untersuchung dieser Problemstellung ist das zentrale Anliegen dieser Arbeit. Wir werden diskutieren, wie die Anwesenheit des Gluonenkondensats ein Coulombartiges Bindungssystem von schweren Quarks und Antiquarks modifiziert, und dies durch den Wert des Gluonenkondensatparameters $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ ausdrücken. Wir werden eine dynamische Gleichung ableiten, die die Zeitentwicklung des Systems in Abhängigkeit des Wertes des Gluonenkondensatparameters ausdrückt. Insbesondere betrachten wir ihren statischen Grenzfall, in dem Quark und Antiquark im Raum festgehalten werden, und bestimmen aus ihr die statische Energie des Quark-Antiquark Systems in Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat. Es ergibt sich dabei eine gute Übereinstimmung mit den phenomenologischen Potentialen⁽¹⁵⁾ bis zu einem Quark-Antiquark Abstand von 0,4 fm. Weiterhin zeigen wir, daß der Zugang von Flory⁽¹⁷⁾ sich aus einer für kleine Abstände gültige Näherung aus unserer Zeitentwicklungsgleichung ergibt, und daß seine Ergebnisse nur für Quark-Antiquark Abstände kleiner als 0,4 fm zuverlässig sind.

Die Arbeit hat folgenden Aufbau:

In einem ersten und einführenden Teil wird eine Übersicht der theoretischen Grundbegriffe gegeben, die in dieser Arbeit verwendet werden. Im Abschnitt 1 werden einige allgemeine Aspekte der Quantenchromodynamik kurz besprochen. Im Abschnitt 2 wird die nichttriviale Struktur des Vakuumzustandes hervorgehoben und dargelegt, daß daraus ein nichtverschwindender Vakuumerwartungswert $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ folgt. Weiterhin wird gezeigt, wie dessen Wert durch Verwendung der QCD-Summenregeln aus dem Charm-Wirkungsquerschnitt bei e^+e^- -Annihilation bestimmt werden kann.

Im zweiten und zentralen Teil dieser Arbeit wird dann untersucht, wie die in diesem nichttrivialen Vakuum enthaltenen nichtstörungstheoretischen gluonischen Fluktuationen - das Gluonenkondensat - ein Coulombartiges Bindungssystem von schweren Quarks und Antiquarks modifizieren. Im Abschnitt 3 wird der Zustandsraum und der Hamiltonoperator der wechselwirkenden Quark-Antiquark- und Gluonenkondensat-Systeme definiert. Es wird hervorgehoben, daß wegen des nichtverschwindenden Vakuumserwartungswertes $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ die Zustände des gluonischen Systems mit indefiniter Metrik normiert werden müssen. Dem Zugang von Leutwyler⁽¹⁹⁾ und Voloshin^(20,21) folgend wird angenommen, daß die gluonischen Vakuumfluktuationen durch eine Längenskala charakterisiert sind, die viel größer als die Ausdehnung des Quark-Antiquark Systems ($Q\bar{Q}$ -Systems) ist. Dann kann eine Multipolentwicklung der Wechselwirkung zwischen beiden Systemen durchgeführt werden^(22,23), bei der nur der Monopol- und Dipolterm berücksichtigt werden.

In den Arbeiten von Leutwyler⁽¹⁹⁾ und Voloshin⁽²⁰⁾ wird dann eine weitere Näherung durchgeführt, indem der erhaltene Wechselwirkungsterm als eine Störung des Coulombartigen $Q\bar{Q}$ -Systems betrachtet wird. In der vorliegenden Arbeit wird über diese störungstheoretische Näherung hinausgegangen, der Wechselwirkungsterm wird implizit in allen Ordnungen der Störungsrechnung berücksichtigt. Dazu wird im Abschnitt 4 der Erwartungswert zwischen gluonischen Vakuumzuständen des Zeitentwicklungsoperators des gesamten Systems betrachtet. Dieses Objekt ist dann ein Operator, der nur noch auf Zustände des $Q\bar{Q}$ -Systems wirkt. Es wird eine Integrodifferentialgleichung abgeleitet, die seine Zeitentwicklung beschreibt. Im Abschnitt 5 wird der Integralkern dieser Gleichung berechnet und durch den Gluonenkondensatparameter $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ ausgedrückt.

Im Abschnitt 6 wird diese Gleichung im statischen Grenzfall, in dem Quark und Antiquark im Raum festgehalten werden, gelöst. Ihre Lösung erlaubt die Bestimmung der Eigenzustände und Eigenwerte des Gesamtsystems in diesem Grenzfall. In einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik wird der physikalische Eigenzustand identifiziert. Durch den entsprechenden Eigenwert ist die statische Energie des statischen $Q\bar{Q}$ -Systems in Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat gegeben.

Im Abschnitt 7 wird das hier erhaltene Ergebnis für die statische Energie mit den phenomenologischen Potentialen und mit den Ergebnissen anderer Arbeiten^(16,17) verglichen. Weiterhin wird diskutiert, ob es bei diesem Zugang konsistent wäre, die statische Energie als Potential zur Berechnung der Spektraleigenschaften schwerer Quarkonium-Systeme zu verwenden. Im Abschnitt 8 werden die gewonnenen Ergebnisse noch einmal zusammenfassend besprochen. Technische Details werden in den Anhängen behandelt.

Erster Teil: GRUNDLAGEN

In diesem ersten und einführenden Teil wird eine kurze Übersicht einiger Aspekte der Quantenchromodynamik (QCD) gegeben. Dabei sollen insbesondere zwei hervorgehoben werden. Zum einen die asymptotische Freiheit der QCD, die für hinreichend schwere Quarks einen störungstheoretischen Zugang zu Beschreibung von Quark-Antiquark Bindungszuständen erlaubt. Zum anderen die nichttriviale Vakuumstruktur der QCD, die zu einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ führt. Es wird dann dargestellt, wie dessen Wert durch Verwendung der QCD-Summenregeln⁽¹²⁾ aus der experimentellen Information über den Charmwirkungsquerschnitt bei e^+e^- -Annihilation bestimmt werden kann.

1. Allgemeine Bemerkungen zur Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik (QCD)⁽¹⁾ ist eine nichtabelsche Eichtheorie, der die Color SU(3)-Symmetrie zugrunde liegt. Ihre fundamentalen Konstituenten sind Spin 1/2 Quarkfelder $q(x)$, die zur fundamentalen (Triplet-)Darstellung der Color SU(3)-Symmetriegruppe gehören. Die durch das Eichprinzip geforderte Implementierung dieser Symmetriegruppe als lokale Symmetrie zwingt zur Einführung von massenlosen Vektor-Eichfeldern $A_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, 8$), die sich entsprechend der adjungierten Darstellung transformieren. Diese sogenannten Gluonfelder treten mit den Quarkfeldern und untereinander in eine durch das Eichprinzip festgelegte Wechselwirkung.

Experimentell sind bis heute fünf verschiedene Quarks nachgewiesen, die sich durch die Flavorquantenzahl (up, down, strange, charm und bottom) unterscheiden. Zu jeder Flavorquantenzahl gehört dann ein Colortriplett-Quarkfeld $q_F(x)$. In die QCD geht dabei der Flavorindex F nur über die Quarkmassen m_F ein.

Die Lagrangedichte

Die Lagrangedichte der QCD ist durch

$$\mathcal{L} = \sum_F \bar{q}_F(x) (i \gamma^\mu D_\mu - m_F) q_F(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G^{a\mu\nu}(x) \quad (1.1)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_0 \lambda^a A_\mu^a(x) \quad (1.2)$$

und dem Gluonfeldstärketensor

$$G_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_0 f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (1.3)$$

gegeben. Die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der Color $SU(3)$ -Gruppe. Die λ^a sind die Darstellungsmatrizen der Generatoren in der fundamentalen Darstellung, mit $[\lambda^a, \lambda^b] = i f^{abc} \lambda^c$. Parameter der Theorie sind die dimensionslose Kopplungskonstante g_0 und die flavorabhängigen Quarkmassen m_F .

Allerdings werden die Quarks und Gluonen nicht direkt als freie Teilchen beobachtet. Dieser Sachverhalt wird durch die Confinement-Hypothese ausgedrückt. Danach sind nur zur Colorsinglett-Darstellung gehörende Bindungszustände der Quarks und Gluonen als freie asymptotische Zustände beobachtbar.

Dimensionale Transmutation

Die Lagrangedichte (1.1) erlaubt die Formulierung der QCD als renormierbare Quantenfeldtheorie. Diese kann in einer störungstheoretischen Entwicklung durch Feynman-Graphen beschrieben werden. Wir vernachlässigen vorerst, um die folgende Diskussion zu vereinfachen, die Quarkmassen m_F in der Lagrangedichte (1.1)*). In Baumgraphennäherung werden die Prozesse dann nur durch die dimensionslose Kopplungskonstante g parametrisiert. Die Theorie enthält in dieser Näherung keine dimensionsbehafteten Parameter und ist somit skaleninvariant.

Quantenkorrekturen (Schleifengraphen) zur Baumgraphennäherung zwingen zur Renormierung der Theorie. Dazu muß ein dimensionsbehafteter Renormierungsskalenparameter ρ - etwa mit der Dimension einer Länge - ein-

*) Dies ist eine gute Näherung wenn man Prozesse betrachtet, deren Energieskala viel größer ist als die für den Prozess relevanten Quarkmassen.

geführt werden. Dieser Parameter setzt die Skala fest, bei der die Normierung der Quantenfelder und der (renormierten) Kopplungskonstante $g(\rho)$ definiert wird. Alle aus der Theorie berechneten Größen hängen dann von dem Renormierungsskalenparameter ρ und von der von diesem abhängigen Kopplungskonstante $g(\rho)$ ab.

Allerdings darf eine physikalisch messbare Größe $P(g, \rho)$ insgesamt nicht von dem - willkürlichen - Renormierungsskalenparameter ρ abhängen. Aus dieser Bedingung folgt die Renormierungsgruppengleichung⁽²⁴⁾

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) P(g(\rho), \rho) = 0 \quad (1.4)$$

mit einer durch

$$\beta(g) = - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho) \quad (1.5)$$

definierten β -Funktion.

Aus dieser Gleichung folgt, daß eine physikalische Größe $P(g, \rho)$ der Dimension d sich als

$$P(g(\rho), \rho) = c R^{-d} \quad (1.6)$$

schreiben läßt, mit der renormierungsgruppeninvarianten Längenskala

$$R = \rho e^{\int_{\rho}^g \frac{1}{\beta(g')} dg'} \quad (1.7)$$

und einer von ρ und g unabhängigen, dimensionslosen, im Prinzip berechenbaren Zahl c .

Durch den Renormierungsprozess wird somit die dimensionslose Kopplungskonstante g_0 der Lagrangedichte durch die dimensionsbehaftete, renormierungsgruppeninvariante Längenskala R als Parameter der Theorie ersetzt. Diese Änderung der Dimensionalität des effektiven Parameters der Theorie bezeichnet man als dimensionale Transmutation. Die Skaleninvarianz der Theorie ist somit durch die zur Renormierung zwingenden Quantenkorrekturen dynamisch gebrochen worden.

Asymptotische Freiheit

Mit der Methode der Renormierungsgruppengleichung kann, unter Verwendung von Dimensionsbetrachtungen, die Skalenabhängigkeit eines Prozesses untersucht werden. Durch die Messung des Prozesses sei bei einer Skala ρ - etwa ein gegebener Abstand - die (renormierte) Kopplungskonstante $g(\rho)$ bestimmt worden. Bei einer anderen Skala $\tau = \frac{1}{\lambda} \rho$ kann der Prozess dann durch eine von dem Skalenfaktor $\lambda = \frac{\rho}{\tau}$ und der Kopplungskonstanten $g(\rho)$ abhängigen gleitenden Kopplungskonstanten $\bar{g}(\lambda, g)$ parametrisiert werden, die implizit bestimmt ist durch

$$\ln \lambda = \int_g^{\bar{g}(\lambda, g)} \frac{1}{\rho(g')} dg' \quad (1.8)$$

mit der β -Funktion (1.5).

Die β -Funktion kann näherungsweise störungstheoretisch bestimmt werden. In Einschleifennäherung ergibt sich ⁽²⁾

$$\beta(g) = - \frac{1}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_F\right) g^3 \quad (1.9)$$

wobei N_F die Anzahl der relevanten Flavours ist. Damit kann (1.8) berechnet werden, und man erhält für die gleitende Kopplungskonstante in dieser Näherung (mit $\lambda = \frac{\rho}{\tau}$)

$$\bar{g}^2\left(\frac{\rho}{\tau}, g\right) = \frac{g^2}{1 + g^2 \frac{1}{8\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_F\right) \ln(\rho/\tau)} \quad (1.10)$$

Man kann die gleitende Kopplungskonstante $\bar{g}$ auch durch die renormierungsgruppeninvariante Längenskala (1.7) ausdrücken, die in Einschleifennäherung gemäß (1.9) (bis auf eine von g unabhängige multiplikative Integrationskonstante) durch

$$R = \rho \, e^{\frac{8\pi^2}{(11 - \frac{2}{3} N_F)} \cdot \frac{1}{g^2}} \quad (1.11)$$

gegeben ist, so daß

$$\bar{g}(\tau/R) = \frac{8\pi^2}{(11 - \frac{2}{3} N_F) \ln(R/r)} \quad (1.12)$$

wird. Die Längenskala R ist der freie Parameter der QCD. Gemäß (1.12) wird die gleitende Kopplungskonstante $\bar{g}(\tau/R)$ beliebig klein^{*)} für Abstände τ die hinreichend klein sind gegenüber dieser der QCD eigenen Längenskala R . Bei diesen Abständen wird die QCD somit eine Theorie mit schwacher Kopplung und eine störungstheoretische Entwicklung ist möglich. Diese Eigenschaft der QCD^{**)} wird als Asymptotische Freiheit bezeichnet.

Quark-Antiquark Bindungszustände

Betrachtet man Bindungszustände von Quarks, so können zwei Grenzfälle unterschieden werden, je nachdem ob die Quarkmasse m_F klein oder groß gegenüber der durch das Inverse der charakteristischen Längenskala R der QCD gegebenen Energieskala $\Lambda = \frac{1}{R}$ ist^{**) .}

Im Grenzfall leichter Quarks, für $m_F \rightarrow 0$, enthält die Theorie nur die Längenskala R als Parameter. Nach (1.6) ist die Masse M eines Bindungszustandes durch

$$M = c R^{-1} = c \mu e^{-\int \frac{1}{\beta(g')} dg'} \quad (1.13)$$

gegeben, mit dem Renormierungsskalenparameter $\mu = 1/\rho$. Verwendet man die Entwicklung (1.9) für die β -Funktion $\beta(g)$, so stellt man fest, daß M nicht in eine störungstheoretische Potenzreihe in der Kopplungskonstanten g entwickelbar ist. Daraus ist zu folgern, daß für leichte Quarks nichtstörungstheoretische Methoden zur Bestimmung des Massenspektrums der Bindungszustände verwendet werden müssen.

Dagegen enthält für schwere Quarks mit $m_F \gg \frac{1}{R}$ die Theorie die Masse der Quarks als weiteren dimensionsbehafteten Parameter. Für hinreichend

*) Für eine Anzahl von relevanten Flavors $N_F \leq 16$.

**) Die charakteristische Längenskala R der QCD ist von der Größenordnung ~ 1 fm, was einem Wert von $\Lambda \sim 0.2$ GeV^(1,3) entspricht.

schwere Quarks mit $m_q \gg \frac{1}{R}$ ist dann ein störungstheoretischer Zugang konsistent. Eingluonenaustausch in nichtrelativistischer Näherung führt zu einem Coulombartigen Potential. Der mittlere Radius eines gebundenen Zustandes mit der Hauptquantenzahl n ist dann von der Größenordnung $\sim \frac{n^2}{m_q \alpha_s}$ (hier ist $\alpha_s = \frac{4}{3} g^2$ die starke Feinstrukturkonstante). Bei einer hinreichend großen Quarkmasse m_q bewegen sich die gebundenen schweren Quarks somit bei Abständen, die klein gegenüber der Längenskala R sind. Aus der asymptotischen Freiheit der Theorie folgt dann, nach (1.12), eine kleine starke Feinstrukturkonstante $\alpha_s = \frac{4}{3} g^2$ und entsprechend kleine Geschwindigkeiten von der Größenordnung von α_s im Bindungszustand, womit die gemachten Näherungen gerechtfertigt sind.

Für die Wechselwirkung zwischen hinreichend schweren Quarks und Antiquarks ergibt sich das Coulombpotential (siehe z.B. (4.9))

$$V_s(r) = - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \quad (1.14)$$

mit

$$\alpha_s = \frac{\bar{g}^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{(11 - \frac{2}{3} N_F) \ln(R/r)} \quad (1.15)$$

gemäß (1.12), wobei Quark und Antiquark zusammen Colorsinglettzustände bilden. Das Potential (1.14) ist attraktiv und erlaubt die Bildung von Bindungszuständen. Quark und Antiquark zusammen können auch Zustände der adjungierten Colordarstellung bilden, wobei sie dann über das abstoßende Coulombpotential

$$V_A(r) = \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r} \quad (1.16)$$

miteinander wechselwirken. Nach der Confinement-Hypothese sind diese Zustände nicht direkt beobachtbar.

Phänomenologische Potentialmodelle

Das zum Coulombartigen Potential (1.14) gehörige Spektrum stimmt nicht mit dem bei den Charmonium- oder Bottomonium-Systemen beobachteten

überein. Die entsprechenden Quarks sind nicht hinreichend schwer, nichtstörungstheoretische Effekte spielen noch eine entscheidende Rolle. Möglicherweise wird erst der schwerere Top-Quark ein Bindungssystem bilden, bei dem die Coulombartige Wechselwirkung deutlicher sichtbar wird.

Die Charmonium- und Bottomonium-Systeme werden mit Erfolg als ein nichtrelativistisches System durch flavorunabhängige phenomenologische Potentiale beschrieben^(8,15). Die experimentellen Daten über die Spektroskopie dieser Systeme bestimmt die phenomenologischen Potentiale für Abstände zwischen 0,1 fm und 1,0 fm. Allen gemeinsam ist ein im Wesentlichen logarithmisches Verhalten in diesem Bereich. Einige der erfolgreichen Potential sind in Abb. 1 dargestellt, die aus⁽¹⁵⁾ entnommen wurde.

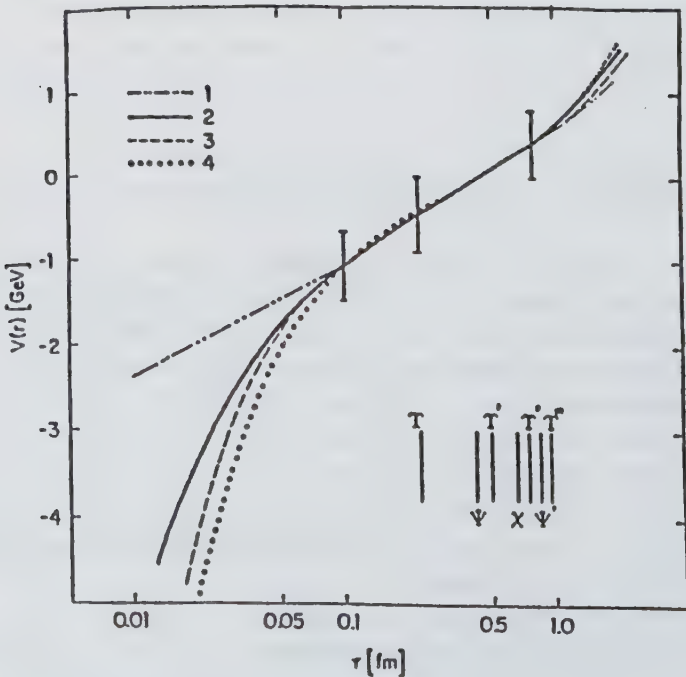


Abb. 1: Logarithmische Darstellung einiger phenomenologischer Potentiale.

Die Zahlen beziehen sich auf folgende Referenzen: (1) Martin⁽²⁵⁾, (2) Buchmüller, Grunberg und Tye⁽²⁶⁾, (3) Bhanot und Rodaz⁽²⁷⁾ und (4) die Cornell-Gruppe⁽²⁸⁾. Die Fehlerbalken beziehen sich auf die Unbestimmtheit in der absoluten, r -unabhängigen Normierung. Der mittlere Radius der Charm(Ψ)- und Bottom(T)-Zustände ist angegeben.

2. Gluonenkondensat und QCD-Summenregeln

Der physikalische Vakuumzustand

Der Vakuumzustand einer relativistischen Quantenfeldtheorie ist als der Lorentzinvariante Zustand niedrigster Energie definiert. Für die QCD erweist es sich, daß der der Lagrangedichte (1.1) entsprechende störungstechnische Grundzustand nicht der Vakuumzustand der Theorie sein kann.

Ein zwingender Grund für diese Behauptung liegt in der spontanen Brechung der (annähernden) chiralen Symmetrie der Lagrangedichte (1.1) für die drei leichtesten Quarks. Im Grenzfall masseloser Quarks ist diese Lagrangedichte - und auch der entsprechende störungstheoretische Grundzustand - invariant unter globalen $SU(3)_V \times SU(3)_A$ Flavortransformationen, was zu den entsprechenden erhaltenen Vektorströmen $J_A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \lambda^a q$ und Axialvektorströmen $J_A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \lambda^a q$ führt. Diese Symmetrie ist nur dann konsistent mit den experimentellen Daten, wenn dabei die chirale $SU(3)_A$ -Symmetrie spontan gebrochen ist. Die dabei auftretenden acht Goldstone-Teilchen werden mit dem pseudoskalaren Pionen-Oktett identifiziert. Die spontane Symmetriebrechung impliziert aber, daß der physikalische Grundzustand - das physikalische Vakuum - nicht invariant unter chiralen $SU(3)_A$ Transformationen ist, im Gegensatz zum störungstheoretischen Grundzustand⁽⁵⁾.

Im unter chiralen Transformationen invarianten störungstheoretischen Grundzustand $|\phi\rangle$ verschwinden für masselose Quarks die Erwartungswerte $\langle \phi | \bar{q} q | \phi \rangle$ der skalaren Quarkoperatorenprodukte $\bar{q} q$. Andererseits werden im physikalischen Vakuumzustand $|0\rangle$, der die chirale Symmetrie nicht aufweist, die Erwartungswerte $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ von Null verschieden sein⁽²⁹⁾. Ihr Wert ist dann ein quantitatives Maß für die Asymmetrie des physikalischen Vakuums. Für kleine, aber nichtverschwindende Quarkmassen erhält man, mit den Methoden der Stromalgebra, die Relation⁽²⁹⁾

$$M_\pi^2 f_\pi^2 = - (m_u + m_d) \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle \quad (2.1)$$

die die Pionmasse M_π und die Pionzerfallskonstante f_π durch die Quarkmassen ausdrückt. Aus dieser Relation folgt, daß $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ nichtverschwindend und negativ sein sollte.

Wenn nun der physikalische Vakuumzustand $|0\rangle$ verschieden von dem störungstheoretischen Grundzustand $|\phi\rangle$ ist, so können auch andere skalare Operatorenprodukte nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte haben. Insbesondere könnte das physikalische Vakuum ein Gluonenkondensat bilden, in dem der Erwartungswert $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ nichtverschwindend wäre⁽¹²⁾.

Durch Verwendung der Spur-Anomalie des Energie-Impulstensors Θ_{λ}^{ν} ^(30,31) kann man zeigen, daß für $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle > 0$ ein solcher Vakuumzustand $|0\rangle$ eine niedrigere Energie hat als der störungstheoretische Grundzustand $|\phi\rangle$ ⁽³²⁾. Die Spur-Anomalie für den QCD ist durch

$$\Theta_{\lambda}^{\lambda} = \frac{\beta(g)}{2g} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_F m_F \bar{q} q + \kappa \cdot 1 \quad (2.2)$$

gegeben, wobei die konstante κ die Vakuumenergiedichte normiert. Die Operatorenprodukte seien so normiert, daß ihr Erwartungswert bezüglich des störungstheoretischen Grundzustandes $|\phi\rangle$ verschwindet. Dann folgt aus (2.2)

$$\langle \phi | \Theta_{\lambda}^{\lambda} | \phi \rangle = \kappa \quad (2.3)$$

Bildet man den Erwartungswert von (2.2) bezüglich des physikalischen Vakuumzustandes $|0\rangle$, so wird

$$\langle 0 | \Theta_{\lambda}^{\lambda} | 0 \rangle = \frac{\beta(g)}{2g} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle + \sum_F m_F \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle + \kappa \quad (2.4)$$

Das Maß für die Differenz der Energiedichten zwischen störungstheoretischem Grundzustand und physikalischem Vakuum ist durch

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \langle \phi | \Theta^{00} | \phi \rangle - \langle 0 | \Theta^{00} | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \left(\langle \phi | \Theta_{\lambda}^{\lambda} | \phi \rangle - \langle 0 | \Theta_{\lambda}^{\lambda} | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

gegeben, wobei die Lorentzinvarianz der Zustände $|\phi\rangle$ und $|0\rangle$ verwendet wurde. Aus (2.3) und (2.4) folgt

$$\sigma_{\theta} = - \frac{\beta(g)}{8g} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle - \sum_F m_F \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle \quad (2.6)$$

Nach (2.6) hat der physikalische Vakuumzustand $|0\rangle$ eine niedrigere Energie als der störungstheoretische Grundzustand $|\phi\rangle$ wenn $\sigma_0 > 0$. Da die B -Funktion nach (1.9) für die QCD negativ ist, wird - auch im Grenzfall masseloser Quarks - $\sigma_0 > 0$ wenn $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ positiv ist. Da nach (2.1) $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle < 0$, wird durch den Quarkbeitrag in (2.6) σ_0 noch vergrößert.

Der positive Wert von $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ wird durch Berechnungen im Rahmen der Gitter-QCD⁽³³⁾ und durch die QCD-Summenregeln bestätigt. Es sei noch angemerkt, daß σ_0 als Energiedichte beobachtbar und somit renormierungsgruppeninvariant ist. Aus (2.6) folgt dann, daß $\frac{P(q)}{2q} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ und $\gamma_q \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ ebenfalls renormierungsgruppeninvariant sind.

Die QCD-Summenregeln

Die QCD-Summenregeln⁽¹²⁾ erlauben die Bestimmung des Wertes von $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ aus den experimentellen Daten über den totalen Charmwirkungsquerschnitt bei e^+e^- -Annihilation. Dieser Prozess wird durch die Stromkorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^c(q) &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi^c(q^2) = \\ &= i \int d^4x e^{-iqx} \langle 0 | T J_\mu^c(x) J_\nu^c(0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

mit dem Vektorstrom $J_\mu^c = \bar{q} \gamma_\mu q^c$ für Quarks des Charm-Flavors beschrieben. Ihr Imaginärteil hängt über

$$\text{Im } \Pi^c(q^2) = \frac{1}{12\pi} \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen mit Charm})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (2.9)$$

mit dem totalen Charmwirkungsquerschnitt zusammen und enthält insbesondere Information über das Spektrum der Spin 1 Bindungszustände des Charmoniumsystems.

Eine exakte Berechnung von $\Pi^c(q^2)$ im Rahmen der QCD ist (noch) nicht möglich. Im Zugang von Shifman, Vainshtein und Zakharov (SVZ)⁽¹²⁾ wird nun unter Verwendung störungstheoretischer Methoden eine Beziehung zwischen der in $\text{Im} \Pi(q^2)$ enthaltenen Information über Bindungszustände und der durch $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ parametrisierten nichtstörungstheoretischen

Struktur des Vakuums hergestellt.

Dazu wird das Stromprodukt in (2.8) durch eine Operatorproduktentwicklung⁽³⁴⁾

$$i T J_{\mu}^c(x) J_{\nu}^c(0) = \sum_n C_{\mu\nu}^{(n)}(x) O_n(0) \quad (2.10)$$

in eine Summe lokaler, aus den Quark- und Gluonenfeldern konstruierter Operatoren O_n entwickelt. Diese Reihe ist nach der Dimension d der Operatoren O_n geordnet. Bei kleinen Abständen dominieren die Koeffizientenfunktionen $C_{\mu\nu}^{(n)}(x)$ der Operatoren mit niedrigster Dimension. Da in (2.8) nur der Vakuumerwartungswert von (2.10) verwendet wird, werden in der Entwicklung nur Operatoren O_n mit den Quantenzahlen des Vakuums zu berücksichtigen sein. Die entsprechenden Operatoren sind der Einheitsoperator mit $d=0$, $m_c \bar{q}_c q_c$ und $G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$ mit $d=4$ und dann weitere Operatoren mit $d \gg 6$. Im störungstheoretischen Vakuum hätte nur der Einheitsoperator einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert. Im physikalischen Vakuum können auch die anderen Operatoren nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte haben.

Für schwere Quarks, deren Felder keine langreichweitigen Fluktuationen bilden, kann $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle$ vernachlässigt werden. Berücksichtigen wir in der Entwicklung (2.10) nur Operatoren mit Dimension $d \leq 4$, so erhält man für die Stromkorrelationsfunktion (2.8)

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^c(q) = (q_{\mu} q_{\nu} - g_{\mu\nu} q^2) \left\{ C_1(q^2, m_c, \alpha_s) + \right. \\ \left. + C_6(q^2, m_c, \alpha_s) \frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Koeffizienten $C_1(q^2, m_c, \alpha_s)$ und $C_6(q^2, m_c, \alpha_s)$ werden durch Störungsrechnung bestimmt. Dies ist konsistent, wenn angenommen wird, daß α_s noch hinreichend klein ist bei Abständen, bei denen der Gluonenkondensatterm schon relevant ist.

Für $\Pi^c(q)$ aus (2.8) gilt die Dispersionsrelation (mit $Q^2 = -q^2$)

$$-\frac{d}{dQ^2} \Pi^c(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} \Pi^c(s)}{(s + Q^2)^2} ds \quad (2.12)$$

Man entwickelt beide Seiten in eine Potenzreihe nach Q^2/m_c^2 um $Q^2=0$. Für die entsprechenden Koeffizienten der Entwicklung - den Momenten M_n - erhält man die Summenregeln

$$M_n = \frac{1}{n!} \left(-\frac{d}{dQ^2} \right)^n \Pi(Q^2) \Big|_{Q^2=0} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \Pi(s)}{s^{n+1}} ds \quad (2.13)$$

Die rechte Seite kann aus der experimentellen Information nach (2.9) bestimmt werden. Für die höheren Momente werden, wegen der Gewichtung mit s^{n+1} im Integral, die den Bindungszuständen des Charmoniumsystems entsprechenden Resonanzen in $\text{Im } \Pi(s)$ betont.

Die linke Seite von (2.13) kann mit der Entwicklung (2.11) berechnet werden. Die relevante Skala ist nun nur durch die schwere Quarkmasse m_c gegeben. Es ergibt sich

$$M_n \simeq \frac{M_n^0}{(m_c^2)^n} \left\{ 1 + \alpha_s A_n + \frac{\alpha_s}{\pi} \langle O | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | O \rangle B_n \right\} \quad (2.14)$$

wobei die Zahlen M_n^0 , A_n und B_n aus der störungstheoretischen Entwicklung der Koeffizienten C_s und C_G aus (2.11) folgen.

Es erweist sich als vorteilhaft, statt den Momenten M_n die Verhältnisse

$$r_n = \frac{M_n}{M_{n-1}} \simeq \frac{1}{m_c^2} \left(\frac{M_n^0}{M_{n-1}^0} \right) \frac{\left(1 + \alpha_s A_n + \frac{\alpha_s}{\pi} \langle O | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | O \rangle B_n \right)}{\left(1 + \alpha_s A_{n-1} + \frac{\alpha_s}{\pi} \langle O | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | O \rangle B_{n-1} \right)} \quad (2.15)$$

zu untersuchen, die schwächer von der Quarkmasse m_c abhängen. Indem man den Nenner entwickelt, erhält man

$$r_n \simeq \frac{1}{m_c^2} \left(\frac{M_n^0}{M_{n-1}^0} \right) \left(1 + \alpha_s (A_n - A_{n-1}) + \frac{\alpha_s}{\pi} \langle O | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | O \rangle (B_n - B_{n-1}) \right) \quad (2.16)$$

Die Verhältnisse r_n hängen von α_s , m_c und $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle O | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | O \rangle$ als Parameter ab. Durch Verwendung der rechten Seite von (2.13) werden sie aus den experimentellen Daten bestimmt. Für kleine n ist der Beitrag des Gluonen-

kondensatterms in (2.14) oder (2.16) verschwindend klein. Deshalb kann, ohne diesen Term zu berücksichtigen, das Moment M_A verwendet werden, um bei gegebenem Wert von α_s die Quarkmasse m_c zu bestimmen. Man erhält $m_c \approx 1.25 \pm 0.5$ GeV, die Unsicherheit kommt von den experimentellen Fehlergrenzen bei der Messung des Charmwirkungsquerschnittes. Der Korrekturterm $\propto A_A$ ist dabei noch klein (10%), so daß der Wert der so bestimmten Quarkmasse nicht stark von dem Wert von α_s abhängt.

Während für $n = 1, 2$ und 3 die experimentell bestimmten τ_m noch mit den nach (2.16) ohne Gluonenkondensatterm berechneten übereinstimmen, so treten für größere n doch starke Abweichungen auf, wie in Abb. 2 festgestellt werden kann. Berücksichtigt man dagegen den Gluonenkondensatterm in (2.16), so kann τ über einen größeren Bereich in n - etwa bis $n = 9$ - in Übereinstimmung gebracht werden, wenn der Wert des Parameters $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ geeignet gewählt wird. Für noch größere n , $n > 10$, erhält man keine Übereinstimmung mehr. Hier müßten weitere Terme höherer Dimension in der Operatorproduktentwicklung (2.11) berücksichtigt werden⁽³⁵⁾.

Auf diese Weise erhält man^(12,13), unter Berücksichtigung der experimentellen Fehler, (wir geben das in⁽¹³⁾ erhaltene Resultat)

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle = 0,014 \begin{matrix} + 0,0044 \\ - 0,0018 \end{matrix} \text{ GeV}^4 \quad (2.17)$$

Dieser Wert stimmt, innerhalb der Fehlergrenzen, mit dem ursprünglich von SVZ⁽¹²⁾ angegebenen Resultat überein, und ist auch verträglich mit den mit den Methoden der Gitter-QCD erzielten Ergebnissen⁽³³⁾.

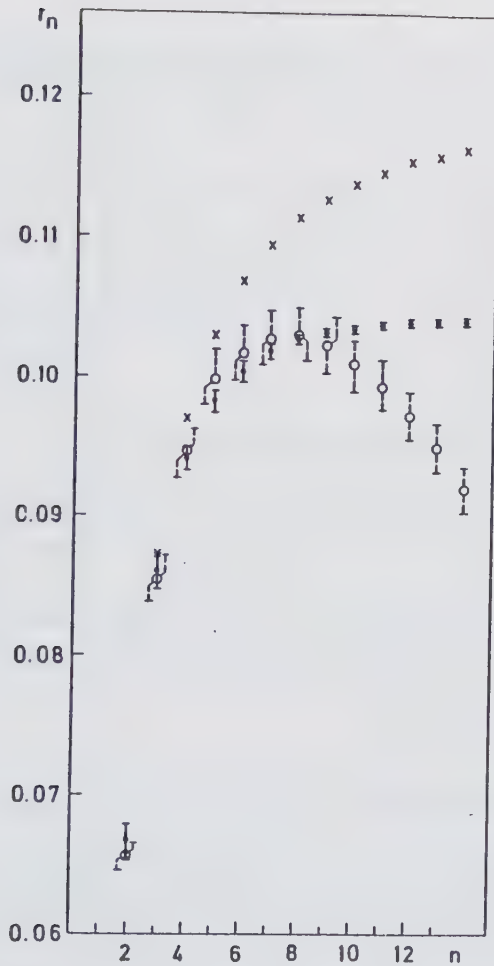


Abb. 2

Dargestellt sind die experimentell bestimmten Verhältnisse r_n (Punkte mit Fehlerbalken) verglichen mit den nach (2.16) berechneten Verhältnissen ohne Gluonenkondensatterm (x) und mit Gluonenkondensatterm (offene Kreise, die Fehler der theoretischen Kurve folgen aus den Fehlern in m_c) für $\alpha_s = 0.3$. Entnommen aus (13).

Zweiter Teil: SCHWERES QUARK-ANTIQUARK-SYSTEM UND GLUONENKONDENSAT

In diesem zentralen Teil der Arbeit wird untersucht, wie ein Coulombartiges Bindungssystem von schweren Quark und Antiquark durch die nichtstörungstheoretischen Fluktuationen des den Vakuumzustand bildenden Gluonenkondensats modifiziert wird. Dies soll dann durch den im Abschnitt 2 bestimmten Wert des Gluonenkondensatparameters $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ ausgedrückt werden.

3. Zustandsraum und Hamiltonoperator

In diesem Abschnitt wird der theoretische Rahmen festgelegt, in dem wir die Beschreibung des schweren $Q\bar{Q}$ -Systems in Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat entwickeln werden. Um dieses System zu beschreiben, betrachten wir einen Zustandsraum in dem sowohl Zustände des $Q\bar{Q}$ -Systems wie auch dem Gluonenkondensat und seinen Anregungen entsprechende Zustände enthalten sind. Wir folgen dem Zugang von Voloshin⁽²⁰⁾ und schreiben dem Hamiltonoperator des Systems, der auf diesen Zustandsraum wirkt, als Summe von drei Termen

$$H = H_Q + H_G + H_I \quad (3.1)$$

von denen H_Q sich auf das $Q\bar{Q}$ -System, H_G sich auf die gluonischen Freiheitsgrade und H_I sich auf die Wechselwirkung zwischen beiden Systemen bezieht.

Für das $Q\bar{Q}$ -System nehmen wir an, daß die Wechselwirkung zwischen Quark und Antiquark durch ein Coulombartiges Potential gegeben ist. Relativistische Korrekturen zu diesem Potential werden wir in dieser Untersuchung vernachlässigen, ebenso wie die Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstanten g in $\alpha_s = g^2/4\pi$. Die Zustände des $Q\bar{Q}$ -Systems gehören zur Singlettdarstellung oder zur adjungierten Darstellung der Color $SU(3)$ Gruppe. Mit den zugehörigen Projektionsoperatoren P_S und P_A ist H_Q durch

$$H_Q = \left(\frac{p^2}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right) P_S + \left(\frac{p^2}{m} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r} \right) P_A \quad (3.2)$$

gegeben. Der kinetische Term $\frac{p^2}{m}$ ist auf den Schwerpunkt des $Q\bar{Q}$ -Systems bezogen. Wir bemerken, daß nur für Colorsinglettzustände das Potential anziehend ist und gebundene Zustände erlaubt. Die Eigenzustände von H_Q gehören zur Singlettdarstellung

$$H_Q |\epsilon_s\rangle = \epsilon_s |\epsilon_s\rangle \quad (3.3)$$

oder zur adjungierten Darstellung

$$H_Q |\epsilon_A\rangle = \epsilon_A |\epsilon_A\rangle \quad (3.4)$$

der Color SU(3) Gruppe. Sie sind vollständig in dem Sinne, daß

$$\sum_{|\epsilon_s\rangle} |\epsilon_s\rangle \langle \epsilon_s| = P_s \quad (3.5)$$

$$\sum_{|\epsilon_A\rangle} |\epsilon_A\rangle \langle \epsilon_A| = P_A$$

und

$$P_s + P_A = 1$$

und bilden eine Basis im Zustandsraum $\mathcal{H}_Q$ der Zustände des $Q\bar{Q}$ -Systems.

Die Dynamik des gluonischen Systems ist, in allem was über Störungsrechnung hinausgeht, im wesentlichen unbekannt. Deshalb kann hier ein expliziter Ausdruck für H_G nicht angegeben werden. Die Zustände des gluonischen Systems können zu der Singlett-, zu der adjungierten, oder zu jeder anderen Darstellung der Color SU(3) Gruppe gehören, die in der Ausreduktion des direkten Produktes einer beliebigen Anzahl von den Gluonen entsprechenden adjungierten Darstellungen enthalten ist. Wir nehmen an, daß das Spektrum von Eigenzuständen von H_G einen Lorentzinvarianten Colorsinglettzustand $|0\rangle$ mit niedrigster Energie enthält, der dem physikalischen Vakuum entspricht. Der Hamiltonoperator H_G des gluonischen Systems sei so normiert, daß

$$H_G |0\rangle = 0 \quad (3.6)$$

gilt.

Wie schon im Abschnitt 2 erwähnt wurde, enthält der physikalische Vakuumzustand $|0\rangle$ nichtstörungstheoretische gluonische Fluktuationen. Der im Abschnitt 2 durch die QCD-Summenregeln bestimmte Vakuumerwartungswert (2.17)

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} | 0 \rangle =: \left(\frac{18}{\pi^2} \right) \gamma \approx 0,014 \text{ GeV}^4 \quad (3.7)$$

ist nichtverschwindend^{*)}. In irgendeinem gegebenen Bezugssystem kann dieses Resultat durch die colorelektrischen und colormagnetischen Felder E_i^a und B_i^a ausgedrückt werden. Wir zeigen im Anhang A, daß aus der Color- und Lorentzinvarianz des Vakuumzustandes folgt^(19,20)

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle = - \frac{3}{2\pi^2} \delta_{ij} \gamma \quad (3.8)$$

und

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | B_i^a B_j^a | 0 \rangle = \frac{3}{2\pi^2} \delta_{ij} \gamma \quad (3.9)$$

mit γ aus (3.7).

Der Vakuumerwartungswert (3.8) des Quadrats des colorelektrischen Feldes ist negativ. Es gibt zwei Möglichkeiten für eine formale Interpretation dieses Resultats. Einerseits können die Feldoperatoren E_i^a als antihermitesche Operatoren betrachtet werden. Dies wäre konsistent mit einer Interpretation der nichtstörungstheoretischen gluonischen Vakuumfluktuationen als Euklidische Feldkonfigurationen. Andererseits können die Feldoperatoren E_i^a als hermitesch betrachtet werden, wenn der Zustandsraum mit Zuständen mit negativer Norm erweitert wird. Dies wurde in (21) vorgeschlagen.

Hier wollen wir die zweite Interpretation übernehmen. Wir betrachten demnach für das gluonische System einen Zustandsraum $\mathcal{H}_G$ mit indefiniter Metrik^(36,37). Wir geben eine kurze Übersicht über die Eigenschaften dieser Räume im Anhang B. Die Singletteigenzustände $|\xi_n\rangle$ von $\mathcal{H}_G$ sind mit po-

*) Es wird sich später als zweckmäßig erweisen, den Vakuumerwartungswert in dieser Form durch einen Parameter γ auszudrücken.

sitiver Metrik gemäß

$$\langle \sigma_m | \sigma_m \rangle = \delta_{mm} \quad (3.10)$$

normiert. Dann ist

$$\Gamma_j = \sum_m |\sigma_m\rangle \langle \sigma_m| \quad (3.11)$$

ein Projektionsoperator auf gluonische Singlettzustände. Wir nehmen an, daß die Eigenzustände $|\chi_m\rangle$ von H_G , die zur adjungierten Darstellung gehören, mit indefiniter Metrik gemäß

$$\langle \chi_m | \chi_m \rangle = N_m \delta_{mm} \quad (3.12)$$

$$N_m = \pm 1$$

normiert sind. Zustände für die $N_m = -1$ sind mit negativer Metrik normiert. Ein Projektionsoperator auf gluonische Zustände der adjungierten Darstellung ist dann durch

$$\Gamma_A = \sum_m N_m |\chi_m\rangle \langle \chi_m| \quad (3.13)$$

gegeben. In dem so definierten Zustandsraum mit indefiniter Metrik kann der Vakuumerwartungswert

$$\begin{aligned} \langle 0 | E_i^a E_i^a | 0 \rangle &= \langle 0 | E_i^a \Gamma_A E_i^a | 0 \rangle \\ &= \sum_m N_m |\langle 0 | E_i^a | \chi_m \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

negativ werden, falls die Terme $|\langle 0 | E_i^a | \chi_m \rangle|^2$ mit Zuständen negativer Metrik, für die $N_i = -1$ ist, in der Summe dominieren.

In einem solchen Zustandsraum mit indefiniter Metrik müssen die physikalisch beobachtbaren Zustände im Sektor mit positiver Norm des Zustandsraumes liegen. Für physikalisch beobachtbare Prozesse muß die Unitarität erhalten bleiben.

Wir betrachten nun den die Wechselwirkung zwischen $Q\bar{Q}$ -System und gluonischem System beschreibenden Term H_I des Hamiltonoperators (3.1). Die Wechselwirkung zwischen beiden Systemen kann in einer Multipolreihe entwickelt werden^(22,23). Wir nehmen an, daß die mittlere Wellenlänge der gluonischen Fluktuationen viel größer als die Ausdehnung des $Q\bar{Q}$ -Systems ist^(19,20). Dann ist es gerechtfertigt, nur die führenden Monopol- und Dipolterme der Multipolentwicklung zu berücksichtigen. Weiterhin betrachten wir nur den nichtrelativistischen Grenzfall, so daß der magnetische Dipolterm vernachlässigt werden kann. Mit diesen Näherungen ist mit

$$H_I = g Q_a A_0^a - \frac{1}{2} g \tau_i d_a E_i^a \quad (3.15)$$

der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator nur durch den Monopolterm und den colorelektrischen Dipolterm gegeben. Bei diesem Ausdruck sind Q_a und d_a Matrizen im direkten Produktraum der Quark und Antiquark Colorfreiheitsgrade, deren explizite Form im Anhang C gegeben wird, τ_i ist eine Komponente des $Q\bar{Q}$ -Abstandvektors und der Wert der nullten Komponente A_0^a des Eichvektorpotentials und der Komponenten E_i^a des colorelektrischen Feldes wird im Massenzentrum des $Q\bar{Q}$ -Systems genommen.

Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator (3.15) ist nicht explizit eichinvariant. Wir zeigen im Anhang D, daß unsere Endresultate unabhängig von der Eichung sein werden. Deshalb können wir hier, um die weitere Beschreibung zu vereinfachen, die temporale Eichung mit $A_a^0 = 0$ wählen, in der der Monopolterm in (3.15) verschwindet und wir somit

$$H_I = - \frac{1}{2} g \tau_i d_a E_i^a \quad (3.16)$$

als Wechselwirkungs-Hamiltonoperator erhalten.

Dieser Wechselwirkungs-Hamiltonoperator induziert Übergänge zwischen Zuständen der Singlett- und der adjungierten Darstellung des $Q\bar{Q}$ -Systems. Wir zeigen im Anhang C, daß Colorsinglett $\longleftrightarrow$ adjungierte und adjungierte $\longleftrightarrow$ adjungierte Übergänge induziert werden, aber keine Singlett $\longleftrightarrow$ Singlett-Übergänge. Mit den entsprechenden Projektionsoperatoren kann H_I dann gemäß

$$H_I = P_S H_I P_A + P_A H_I P_S + P_A H_I P_A \quad (3.17)$$

zerlegt werden.

Betrachten wir nun das Gesamtsystem der wechselwirkenden $Q\bar{Q}$ - und gluonischen Systeme. Sein Zustandsraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_G$ ist durch das direkte Produkt der Zustandsräume $\mathcal{H}_Q$ des $Q\bar{Q}$ -Systems und $\mathcal{H}_G$ des gluonischen Systems gegeben. Wir fordern, daß physikalische Zustände - in unserem Fall schwere Mesonen - zu dem Colorsinglett-Sektor dieses Zustandsraumes gehören. Da das Gesamtsystem abgeschlossen ist, werden durch den Hamiltonoperator (3.1) keine Übergänge zwischen Zuständen unterschiedlicher Colordarstellung des Gesamtsystems induziert. Demzufolge können wir unsere Betrachtungen auf den Colorsinglett-Sektor des Zustandsraumes des Gesamtsystems beschränken.

Das $Q\bar{Q}$ -System befindet sich entweder in der Singlett- oder in der adjungierten Darstellung. Demzufolge gibt es genau zwei Möglichkeiten, um für das Gesamtsystem Colorsinglettzustände zu erhalten. Entweder befindet sich sowohl das $Q\bar{Q}$ -System wie auch das gluonische System in der Singlettdarstellung. Oder beide Systeme befinden sich in der adjungierten Darstellung, da ein Singlett in der Ausreduktion des direkten Produktes von zwei adjungierten Darstellungen enthalten ist. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

Somit stellen wir fest, daß solange das Gesamtsystem sich in Zuständen der Colorsinglett-Darstellung befindet, die in (3.5), (3.11) und (3.13) eingeführten Projektionsoperatoren nur in den Kombinationen $P_S P_S$ und $P_A P_A$ auftreten können. Demzufolge kann jeder Operator U , der nicht die Colordarstellung des Gesamtsystems ändert, wie

$$U = P_S P_S U P_S P_S + P_S P_S U P_A P_A + P_A P_A U P_S P_S + P_A P_A U P_A P_A \quad (3.18)$$

zerlegt werden. Insbesondere wird der Hamiltonoperator (3.1), unter Berücksichtigung der Projektionseigenschaften seiner Terme, wie

$$H = P_3 (H_Q + H_G) P_3 + P_3 H_I P_A + P_A H_I P_3 + P_A (H_Q + H_G + H_A) P_A \quad (3.19)$$

zerlegt. Dabei wurde im letzten Term mit

$$H_A = P_A H_I P_A \quad (3.20)$$

die Projektion des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators (3.16) bezeichnet, die die Subsysteme von der adjungierten in die adjungierte Darstellung überführt. Diese Bezeichnungsweise wird sich später als nützlich erweisen.

Es ist unser Ziel, die stationären Zustände des Gesamtsystems zu finden. Diese Zustände werden Linearkombinationen des direkten Produkts der Eigenzustände von H_Q und H_G sein. Da die Zustände des gluonischen Systems mit indefiniter Metrik normiert sind, ist zu erwarten, daß die stationären Zustände auch mit indefiniter Metrik normiert sein werden. Wir betonen, daß nur die stationären Zustände mit positiver Norm dabei als physikalisch zu betrachten sind.

Bei der Bestimmung der stationären Zustände des Gesamtsystems findet man folgende Schwierigkeit: Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator (3.16) enthält den Operator des colorelektrischen Feldes $E_i^a(0)$, während unsere Information über das Gluonenkondensat sich auf den Wert des Vakuumerwartungswertes $\langle 0 | E_i^a E_i^a | 0 \rangle$ beschränkt. Demzufolge werden wir unseren Formalismus so entwickeln, daß unsere Ergebnisse als Funktion dieses Vakuumerwartungswertes ausgedrückt werden können.

4. Die Zeitentwicklung

Die Information über die stationären Zustände eines Systems ist in seinem Zeitentwicklungsoperator enthalten. Wird das System zur Zeit $t=t_0$ in einem Zustand $|\Psi(t_0)\rangle$ präpariert, so entwickelt es sich in der Zeit zu einem Zustand $|\Psi(t)\rangle = U(t-t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ durch den Zeitentwicklungsoperator $U(t-t_0)$. Dieser genügt der Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} U(t-t_0) = H U(t-t_0) \quad (4.1)$$

$$U(0) = 1$$

mit dem im vorherigen Abschnitt in (3.1) definierten Hamiltonoperator.

Unser Ziel ist es, eine Formulierung der Dynamik zu finden, in der die Zeitentwicklung durch den Vakuumerwartungswert $\langle 0 | E_L^a E_L^a | 0 \rangle$ ausgedrückt wird. Dazu werden wir in diesem Abschnitt eine dynamische Gleichung für $\langle 0 | P_S U(t-t_0) P_S | 0 \rangle$, dem Erwartungswert zwischen Gluon-Vakuumszuständen des Zeitentwicklungsoperators, ableiten. Diese Größe ist ein Operator, der auf die Zustände des $Q\bar{Q}$ -Systems wirkt. Man bemerke, daß wegen der Zerlegung (3.18) dieser Operator nur auf Color-Singlett $Q\bar{Q}$ -Zustände wirkt.

Es erweist sich als vorteilhaft, den Hamiltonoperator als Summe von zwei Termen zu schreiben

$$H = H_0 + H_w \quad (4.2)$$

wobei in

$$H_0 = P_S P_S (H_A + H_C) P_S P_S + P_A P_A (H_Q + H_C + H_A) P_A P_A \quad (4.3)$$

diejenigen Terme des Hamiltonoperators (3.19) zusammengefaßt sind, die die Colordarstellung jeder der beiden wechselwirkenden Systeme nicht ändern, während in

$$H_w = P_S P_S H_X P_A P_A + P_A P_A H_X P_S P_S \quad (4.4)$$

die Terme zusammengefaßt sind, die die Colordarstellung jeweils ändern.

Mit dieser Zerlegung des Hamiltonoperators können wir mit

$$\hat{U}(t-t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)} U(t-t_0) \quad (4.5)$$

den Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild definieren. Dieser ist

dann Lösung von

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t-t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} H_w e^{-iH_0(t-t_0)} \hat{U}(t-t_0) \quad (4.6)$$

$$\hat{U}(0) = 1$$

oder auch von der entsprechenden Integralgleichung

$$\hat{U}(t-t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' e^{iH_0(t'-t_0)} H_w e^{-iH_0(t'-t_0)} \hat{U}(t'-t_0) \quad (4.7)$$

Mit Hilfe der Projektionsoperatoren kann $\hat{U}(t-t_0)$ wie in (3.18) angegeben zerlegt werden:

$$\hat{U}(t-t_0) = P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 + P_3 \hat{U}(t-t_0) P_A P_A + P_A P_A \hat{U}(t-t_0) P_3 + P_A P_A \hat{U}(t-t_0) P_A P_A \quad (4.8)$$

Bildet man den Vakuumerwartungswert von $\hat{U}(t-t_0)$, so wird nur der erste Term dieser Zerlegung übrigbleiben. Demzufolge wird unser erstes Ziel sein, eine Zeitentwicklungsgleichung für $P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3$ abzuleiten. Durch die Anwendung geeigneter Projektionen auf die Integralgleichung (4.7) erhält man, unter Verwendung der in (4.3) und (4.4) angegebenen Projektionseigenschaften von H_0 und H_w ,

$$P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 = P_3 - i \int_{t_0}^t dt' P_3 e^{iH_0(t'-t_0)} P_3 H_w P_A P_A e^{-iH_0(t'-t_0)} P_A P_A \hat{U}(t'-t_0) P_3 \quad (4.9)$$

und

$$P_A P_A \hat{U}(t-t_0) P_3 = -i \int_{t_0}^t dt' P_A P_A e^{iH_0(t'-t_0)} P_A P_A H_w P_3 e^{-iH_0(t'-t_0)} P_3 \hat{U}(t'-t_0) P_3$$

Indem die zweite Gleichung in die erste eingesetzt wird, ergibt sich eine iterierte Integralgleichung für $P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3$, die dann in die Integrodifferentialgleichung

$$i \frac{d}{dt} P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 = -i P_3 e^{iH_0(t-t_0)} \int_{t_0}^t dt' P_3 H_w P_A P_A \cdot e^{-iH_0(t-t')} P_A P_A H_w P_3 e^{-iH_0(t'-t_0)} P_3 \hat{U}(t'-t_0) P_3 \quad (4.10)$$

mit der Anfangsbedingung $P_3 \hat{U}(0) P_3 = P_3$ umgewandelt werden kann.

Da unser Ziel die Ableitung der Zeitentwicklungsgleichung für $\langle 0 | P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 | 0 \rangle$ ist, bilden wir den Vakuumerwartungswert der obenstehenden Gleichung. Während aber auf der linken Seite dieser Gleichung wegen $P_3 | 0 \rangle = | 0 \rangle$ dann die Zeitableitung von $\langle 0 | P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 | 0 \rangle$ steht, haben wir auf der rechten Seite $P_3 \hat{U}(t'-t_0) P_3 | 0 \rangle$ im Integral stehen. Demzufolge schließt die Gleichung nicht. An dieser Stelle müssen wir auf eine Näherung zurückgreifen.

In dem Projektionsoperator P_3 auf Colorsinglettzustände des Gluonsystems

$$P_3 = | 0 \rangle \langle 0 | + \sum_n | \varpi_n \rangle \langle \varpi_n | \quad (4.11)$$

vernachlässigen wir gegenüber dem Vakuumzustand $| 0 \rangle$ alle anderen Colorsinglettzustände $| \varpi_n \rangle$ des Gluonsystems. Diese vernachlässigten Zustände werden Glueballs entsprechen. Man wird eine Energielücke zwischen Glueball-Zuständen und dem Vakuum erwarten. Die Näherung ist dann gut, wenn diese Energielücke groß ist gegenüber Energiedifferenzen im $Q\bar{Q}$ -System. Die Verwendung dieser Näherung bedeutet, daß eine Beimischung von Glueball-Zuständen zu den Zuständen des $Q\bar{Q}$ -Systems vernachlässigt wird.

Mit dieser Näherung erhalten wir eine geschlossene Zeitentwicklungsgleichung für $\langle 0 | P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 | 0 \rangle$. Indem wir die in (4.3) und (4.4) angegebene Form für H_0 und H_W verwenden, erhalten wir

$$i \frac{d}{dt} \langle 0 | P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 | 0 \rangle = i P_3 e^{i H_0(t-t_0)} P_3 \int_{t_0}^t dt' W(t-t') P_3 e^{-i H_0(t'-t_0)} P_3 \langle 0 | P_3 \hat{U}(t'-t_0) P_3 | 0 \rangle \quad (4.12)$$

$$\langle 0 | P_3 \hat{U}(t_0) P_3 | 0 \rangle = 1$$

mit dem Integralkern

$$W(t-t') = \langle 0 | P_3 H_I P_A P_A e^{-i(H_0 + H_6 + H_A)(t-t')} P_A P_A H_I P_3 | 0 \rangle \quad (4.13)$$

Dabei wurde verwendet, daß

$$P_3 e^{-i(H_A + H_G)(t-t_0)} P_3 |0\rangle = |0\rangle P_3 e^{-iH_A(t-t_0)} P_3 \quad (4.14)$$

ist. Dies folgt daraus, daß H_A mit H_G vertauscht, H_A nur auf $\bar{Q}\bar{Q}$ -Zustände wirkt, und $H_G |0\rangle = 0$ ist.

Um in das Schrödingerbild zurückzukehren, verwenden wir, daß

$$\langle 0 | P_3 \hat{U}(t-t_0) P_3 | 0 \rangle = P_3 e^{-iH_A(t-t_0)} \langle 0 | P_3 U(t-t_0) P_3 | 0 \rangle \quad (4.15)$$

was sich aus (4.5) und (4.14) ergibt. Mit der in (3.2) angegebenen expliziten Form für H_A erhalten wir dann die dynamische Gleichung für den Vakuum Erwartungswert des Zeitentwicklungsoperators

$$i \frac{d}{dt} \langle 0 | P_3 U(t-t_0) P_3 | 0 \rangle = \left(\frac{p^2}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right) \langle 0 | P_3 U(t-t_0) P_3 | 0 \rangle - \\ - i \int_{t_0}^t dt' W(t-t') \langle 0 | P_3 U(t'-t_0) P_3 | 0 \rangle \quad (4.16)$$

$$\langle 0 | P_3 U(t_0) P_3 | 0 \rangle = 1$$

mit dem in (4.13) angegebenen Integralkern $W(t-t')$.

Diese ist unsere fundamentale dynamische Gleichung. Sie ist eine Operatorengleichung, da $\langle 0 | P_3 U(t-t') P_3 | 0 \rangle$ und $W(t-t')$ Operatoren sind, die auf Zustände des $\bar{Q}\bar{Q}$ -Systems wirken. Mit nur dem ersten Term auf der rechten Seite hätten wir eine Schrödingergleichung für ein Coulombartiges $\bar{Q}\bar{Q}$ -System. Der zweite Term beschreibt die Wechselwirkung mit den gluonischen Hintergrundfluktuationen.

Zwei Aufgaben liegen vor uns. Zuerst muß der Integralkern (4.13) als Funktion des Vakuum Erwartungswertes $\langle 0 | E_i^a E_i^a | 0 \rangle$ ausgedrückt werden. Dies wird im nächsten Abschnitt ausgeführt. Dann kann man versuchen, eine Lösung der Zeitentwicklungsgleichung (4.16) zu finden. Dies ist keine leichte Aufgabe, da es sich dabei um eine Operatorengleichung handelt. Man wird sich auf einfachere Fragestellungen beschränken oder geeignete Näherungen durchführen müssen.

Insbesondere werden wir aus der Zeitentwicklungsgleichung (4.16) die statische Energie des $Q\bar{Q}$ -Systems in Wechselwirkung mit den gluonischen Fluktuationen bestimmen. Wenn Quark und Antiquark im Raum festgehalten werden, kann der kinetische Term $\vec{p}^2/m$ vernachlässigt werden. In diesem statischen Grenzfall wird die Operatorensgleichung (4.16) eine c-Zahl-Gleichung. Diese kann, wie wir im Abschnitt 6 zeigen werden, exakt gelöst werden.

5. Der Integralkern

In diesem Abschnitt werden wir die explizite Form des Integralkerns (4.13)

$$W(t-t') = \langle 0 | P_S H_I P_A \Gamma_A e^{-i(H_A + H_G + H_A)(t-t')} \Gamma_A P_A H_I P_S | 0 \rangle \quad (5.1)$$

der Integrodifferentialgleichung (4.16) in Termen des Vakuumerwartungswertes $\langle 0 | E_i^a E_i^a | 0 \rangle$ angeben. Wir werden die Diskussion auf zwei Beschreibungsebenen mit unterschiedlichem Komplikationsgrad durchführen. In einer ersten Beschreibungsebene vernachlässigen wir die Wechselwirkung des $Q\bar{Q}$ -Systems mit dem gluonischen System, wenn beide sich in der adjungierten Darstellung befinden und auch in dieser bleiben. Dies bedeutet, daß wir die adjungierte $\leftrightarrow$ adjungierte Projektion $H_A = \Gamma_A P_A H_I P_A \Gamma_A$ des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators (3.16) im Exponenten von (5.1) vernachlässigen^{*}. In einer zweiten Beschreibungsebene werden wir dann den Term H_A mitberücksichtigen.

A) Erste Beschreibungsebene: Ohne H_A

Wir vernachlässigen H_A im Exponenten von (5.1) und berücksichtigen, daß H_A mit H_G vertauscht. Dann faktorisiert die Exponentialfunktion, und wir erhalten

$$W(t-t') = \langle 0 | P_S H_I P_A \Gamma_A e^{-i H_A(t-t')} P_A \Gamma_A e^{-i H_G(t-t')} \Gamma_A P_A H_I P_S | 0 \rangle \quad (5.2)$$

^{*}) Wäre die Eichgruppe der QCD eine $SU(2)$ - statt einer $SU(3)$ -Gruppe, so wäre dieses Vorgehen in der ersten Beschreibungsebene exakt, da dann $H_A = 0$, wie wir im Anhang C nachweisen.

Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator war in (3.16) durch

$$H_I = - \frac{1}{2} g \tau_i d_a E_i^a \quad (5.3)$$

gegeben. Indem wir verwenden, daß - wie wir in (C.16) in Anhang C zeigen -

$$P_s d_a P_A d_b P_s = \frac{2}{3} \delta_{ab} P_s \quad (5.4)$$

und mit $P_A H_A P_A$ aus (3.2), erhalten wir für den Integralkern

$$W(t-t') = \frac{1}{6} g^2 \tau_i e^{-i(P'_m + \frac{1}{6} \frac{Q}{T})(t-t')} \tau_j P_s \langle 0 | E_i^a P_A e^{-iH_b(t-t')} P_A E_j^a | 0 \rangle \quad (5.5)$$

Hier ist

$$\langle 0 | E_i^a P_A e^{-iH_b(t-t')} P_A E_j^a | 0 \rangle \quad (5.6)$$

eine Zeitkorrelationsfunktion für das colorelektrische Feld. Indem wir die Exponentialfunktion entwickeln und nur den Term niedrigster Ordnung behalten, erhalten wir für diese Zeitkorrelationsfunktion einfach den Vakuum Erwartungswert $\langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle$. Diese Näherung ist gültig unter der Annahme, daß die gluonischen Fluktuationen sich langsam ändern gegenüber der Zeit $(t-t')$, in der die $Q\bar{Q}$ - und gluonischen Systeme in der adjungierten Darstellung bleiben, eine Zeitskala die durch die Energiedifferenz zwischen der Singlett- und der adjungierten Darstellungskonfigurationen gegeben ist.

Eine etwas allgemeinere Näherung für die Zeitkorrelationsfunktion (5.6) kann ebenfalls betrachtet werden. Für den durch (3.13)

$$P_A = \sum_m N_m |\gamma_m\rangle \langle \gamma_m| \quad (5.7)$$

gegebenen Projektionsoperator auf gluonische Zustände der adjungierten Darstellung ergibt sich, unter Verwendung von $H_b |\gamma_m\rangle = \gamma_m |\gamma_m\rangle$, daß

$$H_G \Gamma_A = \sum_n N_n \chi_n |\chi_n\rangle \langle \chi_n| \quad (5.8)$$

ist. Damit kann die Zeitkorrelationsfunktion (5.6) durch

$$\langle 0 | E_i^a \Gamma_A \left(\sum_n N_n e^{-i\chi_n(t-t')} |\chi_n\rangle \langle \chi_n| \right) \Gamma_A E_j^a | 0 \rangle \quad (5.9)$$

ausgedrückt werden. Nehmen wir nun an, daß die Eigenzustände $|\chi_n\rangle$ von H_G in der adjungierten Darstellung näherungsweise als entartet betrachtet werden können. Dann ist $\chi_n \approx \chi$ und wir erhalten für die Zeitkorrelationsfunktion in dieser Näherung

$$e^{-i\chi(t-t')} \langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle \quad (5.10)$$

mit einem Parameter $\chi \gg 0$, der als ein grobes mittleres Maß für die Energie der gluonischen Zustände der adjungierten Darstellung betrachtet werden kann. Für $\chi = 0$ erhalten wir das Resultat der vorherigen Näherung.

Indem wir die in (3.8) eingeführte Schreibweise

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle = - \frac{3}{2\pi^2} \delta_{ij} \gamma \quad (5.12)$$

verwenden (mit $\alpha_s = g_{4F}^2$), erhalten wir für den Integralkern

$$W(t-t') = -\gamma e^{-i\chi(t-t')} \int_{t'}^t e^{-i\left(\frac{p^2}{m} + \frac{1}{6}\frac{\alpha_s}{\pi}\right)(t-t')} \tau_i \tau_j \quad (5.13)$$

Im statischen Grenzfall kann der kinetische Term $\frac{p^2}{m}$ vernachlässigt werden. Dann vertauscht der Ortsoperator mit der Exponentialfunktion und wir erhalten

$$W(t-t') = -\gamma \tau^2 e^{-i\left(\frac{1}{6}\frac{\alpha_s}{\pi} + \chi\right)(t-t')} \quad (5.14)$$

Dieses Ergebnis kann auch aus (5.13) als der Term niedrigster Ordnung einer systematischen Entwicklung erhalten werden. Wir werden dies im Abschnitt 7 diskutieren.

B) Zweite Beschreibungsebene: Mit H_A

Wir berücksichtigen nun die adjungierte $\longleftrightarrow$ adjungierte Projektion $H_A = \Gamma_A P_A H_I P_A \Gamma_A$ des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators im Exponenten des Integralkernes (5.1). Wir betrachten von vornherein nur den statischen Grenzfall, so daß $P_{\text{m}}^2 = 0$. Dann vertauscht H_A mit H_A . Für das gluonische System verwenden wir die im Zusammenhang mit (5.10) diskutierte Näherung und setzen $\Gamma_A H_A \Gamma_A = \gamma \Gamma_A$. Dann erhalten wir für den Integralkern (5.1) im statischen Grenzfall

$$W(t-t') = e^{-i \left(\frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{\gamma} + \gamma \right) (t-t')} \langle 0 | P_I H_I P_A \Gamma_A e^{-i H_A (t-t')} \Gamma_A P_A H_I P_I | 0 \rangle \quad (5.15)$$

Indem wir $e^{-i H_A (t-t')}$ entwickeln, erhalten wir

$$W(t-t') = e^{-i \left(\frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{\gamma} + \gamma \right) (t-t')} \quad (5.16)$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (t-t')^n}{n!} \langle 0 | P_I H_I \underbrace{P_A \Gamma_A H_I P_A \Gamma_A \dots P_A \Gamma_A H_I P_I}_{n \text{ Mal}} | 0 \rangle$$

Betrachten wir das Matrixelement im n-ten Term in dieser Entwicklung. Mit

$$H_I = -\frac{1}{2} g \tau_i d_a E_i^a \quad (5.17)$$

aus (3.16) erhalten wir

$$\frac{1}{4} g^2 \left(-\frac{1}{2} g \right)^n \langle 0 | P_I d_a (\tau_i E_i^a) \underbrace{P_A d_b (\tau_j E_j^b) P_A \dots P_A d_x (\tau_x E_x^x) P_I}_{n \text{ Mal}} | 0 \rangle \quad (5.18)$$

Die Projektionsoperatoren Γ_A wurden in diesem Ausdruck weggelassen. Dies zu tun, ist konsistent, da der Projektionsoperator Γ_A nur zusammen mit P_A erscheinen kann, wie wir im Zusammenhang mit (3.18) diskutiert haben. Wir zeigen im Anhang C, daß der Ausdruck im Matrixelement (5.18) in ein Produkt von auf das gluonische System wirkenden Colorsinglettoperatoren zerfällt. Wir verwenden die Ausdrücke (C.18) und (C.19) aus Anhang C, mit

$F_a = (\tau_i E_i^a)$. Dann erhalten wir für (5.18), für n gerade

$$\frac{1}{2} g^2 \left(\frac{1}{2} g \right)^n \langle 0 | \left(\frac{1}{3} \tau_i \tau_j E_i^a E_j^a \right)^{\frac{n+2}{2}} | 0 \rangle \quad \mathcal{P}_3 \quad (5.19)$$

und für n ungerade

$$\frac{1}{2} g^2 \left(-\frac{1}{2} g \right)^n \langle 0 | \left(\frac{1}{3} \tau_i \tau_j E_i^a E_j^a \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{3} d_{bcd} \tau_k \tau_l \tau_m E_k^b E_l^c E_m^d \right) | 0 \rangle \quad \mathcal{P}_3 \quad (5.20)$$

Wir saturieren wie in (4.11) den Colorsinglettsektor der gluonischen Zustände durch den Vakuumzustand. Dann erhalten wir für gerades n

$$\frac{1}{6} g^2 \tau_i \tau_j \langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle \left(\frac{1}{12} g^2 \tau_k \tau_l \langle 0 | E_k^b E_l^b | 0 \rangle \right)^{\frac{n}{2}} \quad \mathcal{P}_3 \quad (5.21)$$

Daraus wird, indem wir wie in (5.12) $\langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle$ durch γ ausdrücken,

$$- \gamma \tau^2 \left(\sqrt{-\frac{1}{2} \gamma \tau^2} \right)^n \quad \mathcal{P}_3 \quad (5.22)$$

oder

$$- \gamma \tau^2 \left(i \sqrt{\frac{1}{2} \gamma \tau^2} \right)^n \quad \mathcal{P}_3 \quad (5.23)$$

Für n ungerade erhalten wir aus (5.20) einen Ausdruck, der einen Faktor $\langle 0 | E_k^b E_l^c E_m^d | 0 \rangle$ enthält. Dieser Faktor verschwindet, da der gluonische Vakuumzustand $|0\rangle$ invariant unter Paritätstransformationen ist.

Demzufolge sind nur Terme mit geraden n in der Entwicklung (5.16) enthalten. Wir erhalten für den Integralkern (mit $n=2m$)

$$W(t-t') = -\gamma \tau^2 e^{-i \left(\frac{1}{6} \frac{\alpha}{\tau} + \delta \right) (t-t')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \gamma \tau^2} (t-t') \right)^{2m} \quad \mathcal{P}_3 \quad (5.24)$$

Daraus ergibt sich dann

$$W(t-t') = -\gamma r^2 e^{-i\left(\frac{1}{6}\frac{\alpha_f}{r} + \delta\right)(t-t')} \cosh\left(\sqrt{\frac{1}{2}\gamma r^2}(t-t')\right) P_5 \quad (5.25)$$

6. Die statische Energie

In diesem Abschnitt bestimmen wir die statische Energie des $Q\bar{Q}$ -Systems in Wechselwirkung mit den gluonischen Fluktuationen. Quark und Antiquark werden nun im Raum festgehalten. Somit entfällt der kinetische Term P_m^2 in der Zeitentwicklungsgleichung (4.16). Im statischen Grenzfall gibt es dann genau zwei Eigenzustände $|\epsilon_s\rangle$ und $|\epsilon_A\rangle$ des Hamiltonoperators H_Q des $Q\bar{Q}$ -Systems, die zur Singlett- bzw. adjungierten Darstellung gehören.

Im Unterraum der Colorsinglettzustände des Zustandsraumes des totalen Systems von wechselwirkenden $Q\bar{Q}$ - und gluonischen Systemen ist, innerhalb der in (4.11) angegebenen Näherung und im statischen Grenzfall dann eine Basis durch die Colorsinglettzustände

$$|S\rangle = |\epsilon_s\rangle |0\rangle \quad (6.1a)$$

und

$$|A_m\rangle = |\epsilon_A\rangle |\chi_m\rangle \quad (6.1b)$$

gegeben. Genauer formuliert, sind die Zustände $|A_m\rangle$ die Singlettprojektion des direkten Produktes von $|\epsilon_A\rangle$ und den zur adjungierten Darstellung gehörenden Eigenzustände $|\chi_m\rangle$ des gluonischen Hamiltonoperators H_G . Es sei hervorgehoben, daß die Normierung der Zustände $|\chi_m\rangle$ mit einer indefiniten Metrik gemäß (3.12) eine Normierung mit indefiniter Metrik $\langle A_m | A_m \rangle = N_m \delta_{mm}$ für die Zustände $|A_m\rangle$ impliziert.

Diese Zustände werden, im allgemeinen, keine Eigenzustände des totalen Hamiltonoperators (3.1) sein. Unser Ziel ist die Bestimmung dieser Eigenzustände. Wir werden dann feststellen, daß einer der Eigenwerte der statischen Energie des totalen Systems entspricht.

Dazu nehmen wir den Erwartungswert zwischen Singlettzuständen $|E_s\rangle$ der Zeitentwicklungsgleichung (4.16). Für

$$\langle E_s | \langle 0 | U(t-t_0) | 0 \rangle | E_s \rangle =: \langle S | U(t-t_0) | S \rangle \quad (6.2)$$

erhalten wir, im statischen Grenzfall,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle &= -\frac{4}{3} \frac{\kappa_s}{r} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle \\ &\quad - i \int_{t_0}^t dt' \langle E_s | W(t-t') | E_s \rangle \langle S | U(t'-t_0) | S \rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\langle S | U(0) | S \rangle = 1$$

mit dem Integralkern $W(t-t')$ aus (4.13). Diese ist nun eine gewöhnliche c-Zahl Integrodifferentialgleichung, in der der Quark-Antiquark Abstand r nur noch als Parameter auftritt. Wir werden diese Gleichung in den beiden im vorherigen Abschnitt aufgezeigten Beschreibungsebenen lösen.

A) Erste Beschreibungsebene

In der ersten Beschreibungsebene vernachlässigen wir die adjungierte $\leftrightarrow$ adjungierte Projektion des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators. Indem wir dann den in (5.14) angegebenen Ausdruck für den Integralkern verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle &= -\frac{4}{3} \frac{\kappa_s}{r} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle \\ &\quad + i \gamma r^2 \int_{t_0}^t dt' e^{-i \left(\frac{4}{3} \frac{\kappa_s}{r} + \gamma \right) (t-t')} \langle S | U(t'-t_0) | S \rangle \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\langle S | U(0) | S \rangle = 1$$

Diese Gleichung wird im Anhang E gelöst. Ihre Lösung ist durch

$$\langle S | U(t-t_0) | S \rangle = c_1 e^{-i E_1(t-t_0)} + c_2 e^{-i E_2(t-t_0)} \quad (6.5)$$

gegeben, mit

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{6} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma - R \right) \quad (6.6a)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{6} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma + R \right) \quad (6.6b)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2R} \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \quad (6.6c)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2R} \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \quad (6.6d)$$

und

$$R = \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right)^2 - 4\gamma r^2} \quad (6.7)$$

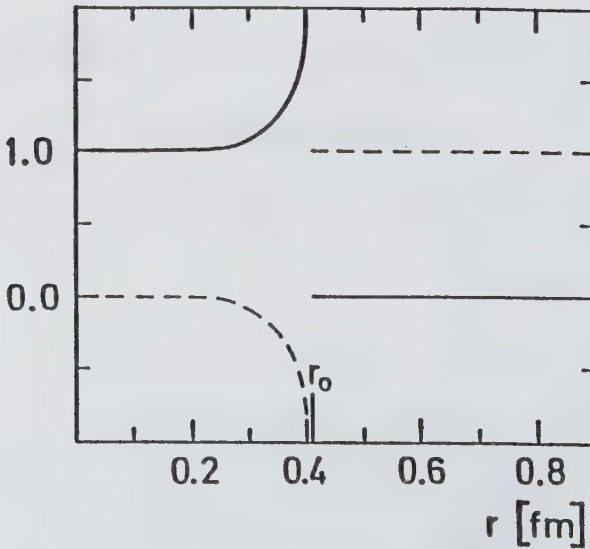


Abb. 3

Dargestellt ist $C_1(r) = |\langle S | E_1 \rangle|^2$ (—————) und $C_2(r) = -|\langle S | E_2 \rangle|^2$ (- - - - -). Der Abstand $r = r_0$ ist angegeben. Für $r > r_0$ ist $C_1 + C_2^* = 1$ (- - - - -) und $|\langle S | E_1 \rangle|^2 = 0$ (—————) dargestellt.

Wir bemerken, daß $\mathcal{R}$ für einen Quark-Antiquark Abstand r_0 null wird, für den

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r_0} + \gamma \right) - 4 \gamma r_0^2 = 0 \quad (6.8)$$

Dementsprechend werden die Koeffizienten c_1 und c_2 bei $r = r_0$ divergieren. Für $r < r_0$ ist c_1 , c_2 , E_1 und E_2 reell. Wir haben c_1 und c_2 in Abb. 3, E_1 und E_2 in Abb. 4 dargestellt. Für $r > r_0$ werden diese Größen komplex, mit $c_2 = c_1^*$ und $E_2 = E_1^*$.

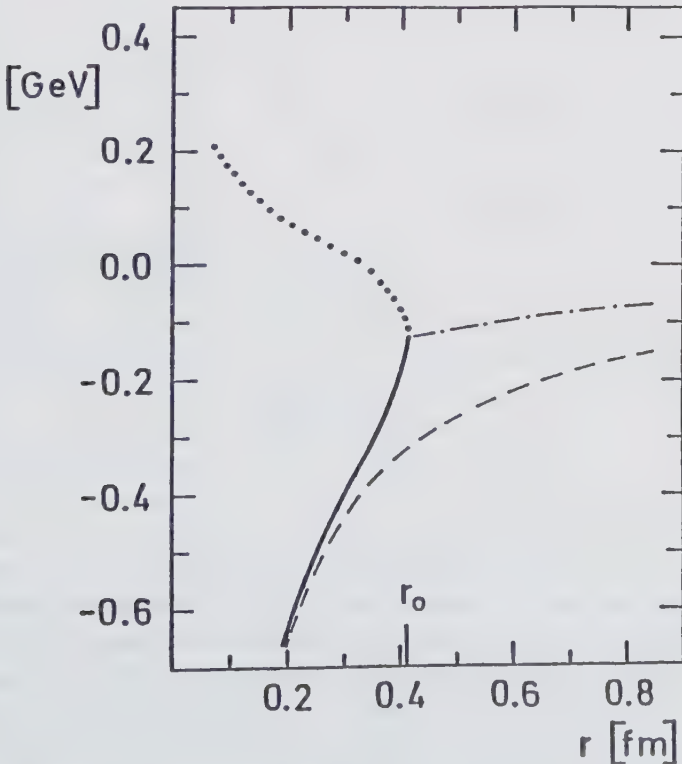


Abb. 4a

Dargestellt ist die statische Energie $E_1(r)$ (—) und $E_2(r)$ (.....) für $\gamma = 0,0$ GeV und $\alpha_s = 0,5$. Zum Vergleich wurde auch die Coulomb-Energie aufgetragen (---). Der Abstand $r = r_0$ ist angegeben. Für $r > r_0$ ist der Realteil von $E_1(r)$ (---) dargestellt.

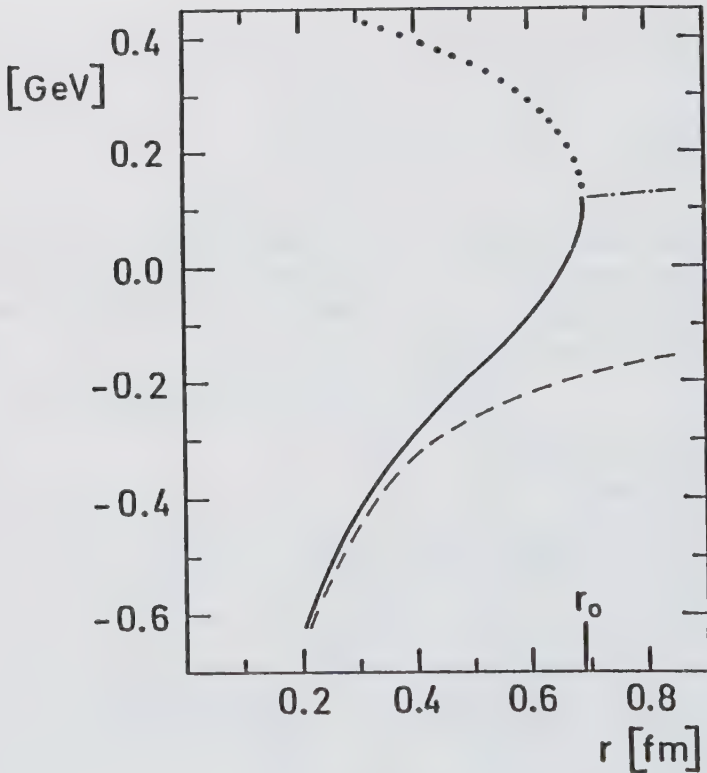


Abb. 4b

Gleiche Darstellung wie Abb. 4a für $\alpha = 0,4$ GeV

Wir diskutieren nun die physikalische Interpretation der für $\langle S|U(t-t_0)|S \rangle$ gefundenen Lösung (6.5). Wir sehen sofort, daß im allgemeinen der Zustand $|S\rangle = |E_1\rangle |0\rangle$ kein stationärer Zustand des totalen Systems sein wird. Betrachten wir zuerst den Fall in dem $t < t_0$, so daß $\epsilon_1, \epsilon_2, E_1$ und E_2 reell sind. Wir führen in unserem Zustandsraum mit indefiniter Metrik^{*)} orthonormale Zustände $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ ein, in denen der Zeitentwicklungsoperator $U(t-t_0)$ diagonal ist. Wir nehmen an, daß diese

*) Eine kurze Übersicht über die Eigenschaften dieser Räume wird im Anhang B gegeben.

Zustände eine Basis des Zustandsraumes bilden. Dann kann das Matrixelement $\langle s | U(t-t_0) | s \rangle$ gemäß

$$\langle s | U(t-t_0) | s \rangle = |\langle s | E_1 \rangle|^2 \langle E_1 | U(t-t_0) | E_1 \rangle + |\langle s | E_2 \rangle|^2 \langle E_2 | U(t-t_0) | E_2 \rangle \quad (6.9)$$

zerlegt werden. Durch Vergleich mit (6.5) identifizieren wir

$$|\langle s | E_1 \rangle|^2 \langle E_1 | U(t-t_0) | E_1 \rangle = c_1 e^{-i E_1 (t-t_0)} \quad (6.10a)$$

und

$$|\langle s | E_2 \rangle|^2 \langle E_2 | U(t-t_0) | E_2 \rangle = c_2 e^{-i E_2 (t-t_0)} \quad (6.10b)$$

Insbesondere wird, indem wir $t=t_0$ setzen

$$\begin{aligned} |\langle s | E_1 \rangle|^2 \langle E_1 | E_1 \rangle &= c_1 \\ |\langle s | E_2 \rangle|^2 \langle E_2 | E_2 \rangle &= c_2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nun ist, wie wir aus (6.6) oder Abb. 3 feststellen können, $c_1 \geq 0$ und $c_2 \leq 0$ für $\tau < \tau_0$. Während demzufolge der Zustand $|E_1\rangle$ mit positiver Norm, $\langle E_1 | E_1 \rangle = 1$, normiert werden kann, muß der Zustand $|E_2\rangle$ mit negativer Norm, $\langle E_2 | E_2 \rangle = -1$, normiert werden, da nur dann $|\langle s | E_2 \rangle|^2 \langle E_2 | E_2 \rangle$ negativ sein kann.

Wir stellen fest, daß die vorher gemachte Annahme der Vollständigkeit der Zustände $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ sich als konsistent erwiesen hat. Insbesondere waren keine Zustände mit Norm null notwendig, um die Lösung (6.5) für $\tau < \tau_0$ zu interpretieren. Aus (6.10) sehen wir, daß die Zustände $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ stationäre Zustände sind. Sie sind, innerhalb der angewandten Näherungen, die Eigenzustände des Hamiltonoperators (3.1) des Gesamtsystems.

Wir identifizieren den Eigenzustand $|E_1\rangle$ als den physikalischen, stationären gebundenen Zustand des Gesamtsystems der wechselwirkenden statischen $Q\bar{Q}$ - und gluonischen Systeme. Der entsprechende Eigenwert E_1 ist die attraktive statische Energie des Gesamtsystems. Er ist in Abb. 4

als Funktion des Abstands r zwischen Quark und Antiquark aufgetragen. Wir untermauern diese Identifizierung, indem wir den Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ betrachten, in dem die gluonischen Fluktuationen vernachlässigt werden. Wir sehen aus (6.6) und (6.7), daß in diesem Grenzfall $E_A(r)$ in die anziehende Coulomb-Energie $-\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$ übergeht. Außerdem wird $|\langle S | E_A \rangle|^2 = c_1 = 1$, so daß der Eigenzustand $|E_A\rangle$ mit dem Zustand $|S\rangle = |E_1\rangle |0\rangle$, dem gebundenen Coulombartigen Eigenzustand von H_A , übereinstimmt.

Andererseits sehen wir aus Abb. 4, daß dem Eigenzustand $|E_2\rangle$ eine abstoßende statische Energie $E_A(r)$ entspricht. Im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ geht $E_A(r)$ in die abstoßende Coulomb-Energie $\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$ über. Der Eigenzustand $|E_2\rangle$ entspricht somit einem ungebundenen Quark und Antiquark und wäre als unphysikalisch zu betrachten. Es sei noch einmal hervorgehoben, daß während der physikalische Eigenzustand $|E_A\rangle$ mit positiver Norm normiert ist, der Eigenzustand $|E_2\rangle$ mit negativer Norm normiert ist, und somit formal als unphysikalisch zu betrachten ist.

Der Eigenzustand $|E_A\rangle$ ist eine lineare Überlagerung der Zustände $|S\rangle = |E_1\rangle |0\rangle$, in dem sich das $Q\bar{Q}$ - und das gluonische System jeweils in der Singlettdarstellung befinden, und $|A_n\rangle$, in denen beide Systeme sich, ein totales Singlett bildend, in der adjungierten Darstellung befinden

$$|E_A\rangle = |S\rangle \langle S | E_A \rangle + \sum_n N_n |A_n\rangle \langle A_n | E_A \rangle \quad (6.12)$$

$$N_n = \pm 1$$

Die "Wahrscheinlichkeit", den Eigenzustand $|E_A\rangle$ im Zustand $|S\rangle = |E_1\rangle |0\rangle$ zu finden, ist durch $|\langle S | E_A \rangle|^2 = c_1$ gegeben. Aus (6.6) oder Abb. 3 sehen wir, daß $c_1 \geq 1$ für $r < r_0$. Die "Wahrscheinlichkeit", den Eigenzustand $|E_A\rangle$ in irgendeinem der Zustände $|A_n\rangle$ zu finden, ist durch $\sum_n N_n |\langle A_n | E_A \rangle|^2$ gegeben. Indem wir Orthogonalität und Normierung der Zustände verwenden, können wir zeigen, daß dies gleich $-\langle S | E_2 \rangle^2 = c_2$ ist. Für $r < r_0$ ist $c_2 \leq 0$. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit, den Eigenzustand in irgendeinem der Zustände $|S\rangle$ oder $|A_n\rangle$ zu finden, gleich $c_1 + c_2 = 1$.

Das Auftreten dieser "Wahrscheinlichkeiten", die größer als eins oder auch negativ sind, ist konsistent in einem Zustandsraum mit indefinierter Metrik und eine direkte Folge des negativen Wertes (3.8) von $\langle 0 | E_i^a E_i^a | 0 \rangle$. Andererseits dürfen diese "Wahrscheinlichkeiten" keinem physikalisch beobachtbaren Prozess entsprechen. Da wir den Eigenzustand $|E_A\rangle$ als den physikalisch gebundenen Zustand unseres Systems betrachten und eine "Wahrscheinlichkeit" $|\langle S | E_A \rangle|^2 \gg 1$ unphysikalisch ist, folgt, daß der Zustand $|S\rangle = |E_S\rangle |0\rangle$ nicht als ein observabler Zustand betrachtet werden kann. Wie schon von Voloshin⁽²¹⁾ hervorgehoben wurde^{*}, kann ein solcher Zustand, in dem die räumlich getrennten Quark und Antiquark sich in einer festgelegten Color-darstellung befinden, nicht in der Anwesenheit gluonischer Vakuumsfluktuationen beobachtet werden.

Betrachten wir nun das Verhalten der statischen Energie $E_A(r)$, die nach (6.6) durch

$$E_A(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{6} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma - \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma\right)^2 - 4\gamma\tau^2} \right) \quad (6.13)$$

gegeben war, bei kleinen Abständen. Indem wir die Wurzel in Potenzen von

$$4\gamma\tau^2 / \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma\right)^2$$

entwickeln, erhalten wir

$$E_A(r) \simeq -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \frac{r^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma\right)} \quad (6.14)$$

Man erhält die Coulomb-Energie und ein Korrekturterm. Für $\gamma=0$ ist dieser proportional zu γr^3 , eine Form, die man aus dimensional Überlegungen heraus erwartet hätte, und die in der Literatur⁽¹⁶⁾ diskutiert wurde.

Aus (6.13) und Abb. 4 sehen wir, daß wenn sich der Quark-Antiquark Abstand r dem durch (6.8) definierten Wert $r = r_0$ nähert, bei dem die Wur-

^{*}) Diese Interpretationsprobleme treten schon auf, wenn man die Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat als Störung des Coulombartigen $Q\bar{Q}$ -Systems betrachtet, und sie wurden in diesem Zusammenhang von Voloshin⁽²¹⁾ diskutiert. Er weist darauf hin, daß eine nichtlokale eichinvariante Quelle für das $Q\bar{Q}$ -Paar, mit der der Zustand $|S\rangle = |E_S\rangle |0\rangle$ gemessen werden könnte, auch gluonische Freiheitsgrade enthalten müßte. Diese würden dann direkt mit den gluonischen Fluktuationen des Gluonenkondensats wechselwirken, und die Colorstellung des $Q\bar{Q}$ -Systems wäre somit nicht beobachtbar.

zel in (6.13) imaginär wird, die Steigung von $E_A(r)$ senkrecht wird. Es ist als ob Quark und Antiquark über diesen Punkt hinaus nicht getrennt werden könnten. Außerdem divergieren die "Wahrscheinlichkeiten" $|\langle S|E_A\rangle|^2 = c_1$ und $|\langle S|E_B\rangle|^2 = -c_2$ an diesem Punkt wie man aus (6.6) und Abb.3 sehen kann.

Für Quark-Antiquark Abstände $r > r_0$ ist in der Lösung (6.5) c_1, c_2, E_1 und E_2 komplex, mit $c_2 = c_1^*$ und $E_2 = E_1^*$, so daß

$$\langle S|U(t-t_0)|0\rangle = c_1 e^{-iE_1(t-t_0)} + c_1^* e^{-iE_1^*(t-t_0)} \quad (6.15)$$

wird. Der Realteil von E_1 und E_2 ist in Abb. 3 und Abb. 4 dargestellt, der Imaginärteil jeweils in Abb. 7 und Abb. 8.

In diesem Fall führt die Annahme einer orthonormalen Basis von Zuständen, in denen der Zeitentwicklungsoperator diagonal wäre, nicht zu einer konsistenten Interpretation der Lösung (6.15) für $r > r_0$. Wir gelangen zu einer konsistenten Interpretation, indem wir eine Basis von nicht-orthogonalen Zuständen mit Norm Null^{*)} - sogenannte Geisterzustände - $|G\rangle$ und $|G^*\rangle$ einführen, für die $\langle G|G\rangle = \langle G^*|G^*\rangle = 0$ und $\langle G|G^*\rangle = \langle G^*|G\rangle = 1$, so daß $\langle S|U(t-t_0)|S\rangle$ gemäß

$$\langle S|U(t-t_0)|S\rangle = \langle S|G\rangle\langle G^*|S\rangle\langle G^*|U(t-t_0)|G\rangle + \langle S|G^*\rangle\langle G|S\rangle\langle G|U(t-t_0)|G^*\rangle \quad (6.16)$$

zerlegt werden kann. Indem wir mit (6.15) vergleichen, identifizieren wir

$$\langle S|G\rangle\langle G^*|S\rangle = c_1$$

$$\langle S|G^*\rangle\langle G|S\rangle = c_2$$

$$\langle G^*|U(t-t_0)|G\rangle = e^{-iE_1(t-t_0)} \quad (6.17)$$

$$\langle G|U(t-t_0)|G^*\rangle = e^{-iE_1^*(t-t_0)}$$

*) Diese Zustände werden im Anhang B besprochen.

Wir stellen fest, daß für $\tau > \tau_0$ keine stationären Zustände mit positiver Norm gefunden werden können, die als physikalische Eigenzustände des Systems zu identifizieren wären. Die Norm Null Zustände $|G\rangle$ und $|G^*\rangle$ müssen als unphysikalisch betrachtet werden. Innerhalb der durchgeführten Näherungen existiert das System demzufolge nur für Abstände τ die kleiner sind als ein kritischer Abstand τ_0 .

B) Zweite Beschreibungsebene

Wir betrachten nun die zweite Beschreibungsebene, in der die adjungierte adjungierte Projektion des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators berücksichtigt wird. Wir verwenden nun in der Zeitentwicklungsgleichung (6.3) den Ausdruck (5.25) für den Integralkern, und erhalten

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle s | U(t-t_0) | s \rangle &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_2}{\tau} \langle s | U(t-t_0) | s \rangle + \\ &+ i \gamma \tau \int_{t_0}^t dt' e^{-i \left(\frac{4}{3} \frac{\alpha_2}{\tau} + \gamma \right) (t-t')} \cosh \left(\sqrt{\frac{4}{3} \tilde{\gamma} + \tau^2} (t-t') \right) \langle s | U(t'-t_0) | s \rangle \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\langle s | U(0) | s \rangle = 1$$

Hier ist $\tilde{\gamma} = \gamma$. Für $\tilde{\gamma} = 0$ erhalten wir wieder die Zeitentwicklungsgleichung (6.4) der ersten Beschreibungsebene.

Diese Gleichung wird im Anhang F gelöst. Ihre Lösung ist durch

$$\langle s | U(t-t_0) | s \rangle = \tilde{C}_1 e^{-i \tilde{E}_1(t-t_0)} + \tilde{C}_2 e^{-i \tilde{E}_2(t-t_0)} + \tilde{C}_2^* e^{-i \tilde{E}_2^*(t-t_0)} \quad (6.19)$$

gegeben. Hierbei sind $\tilde{C}_1$ und $\tilde{E}_1$ reell, während $\tilde{C}_2$ und $\tilde{E}_2$ komplex sind. Wir haben $\tilde{C}_1$ und den Realteil von $\tilde{C}_2$ in Abb. 5, $\tilde{E}_1$ und den Realteil von $\tilde{E}_2$ in Abb. 6 dargestellt. Der Imaginärteil von $\tilde{C}_2$ und $\tilde{E}_2$ ist jeweils in Abb. 7 und Abb. 8 dargestellt, alles als Funktion des $Q\bar{Q}$ -Abstandes τ . Setzen wir $t = t_0$, so können wir anhand von Abb. 4 die korrekte Normierung

$$\langle s | s \rangle = \tilde{C}_1 + 2 \operatorname{Re}(\tilde{C}_2) = 1 \quad (6.20)$$

der Zustände $|s\rangle$ überprüfen.

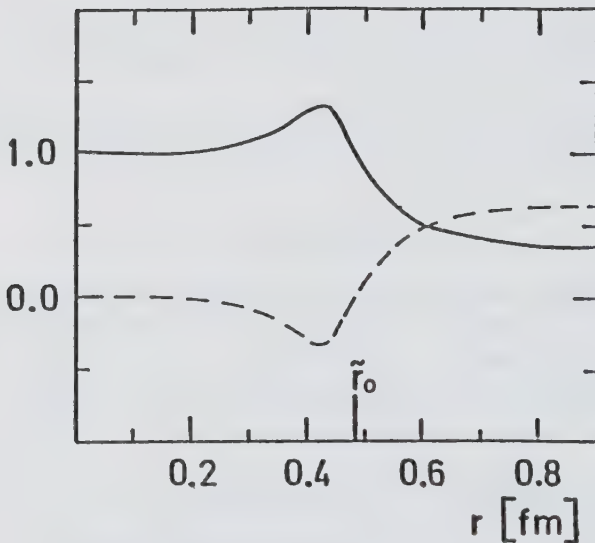


Abb. 5

Darstellung von $\tilde{c}_1(r) = |\langle s | \tilde{E}_1 \rangle|^2$ (—) und von $c_2(r) + c_2^*(r) = 2 \operatorname{Re}(\tilde{c}_2)$ (----). Angegeben ist der Abstand $r = \tilde{r}_0$ wo $|\langle s | \tilde{E}_1 \rangle|^2$ kleiner als eins wird.

Um zu einer konsistenten physikalischen Interpretation der in (6.19) gefundenen Lösung für $\langle s | U(t-t_0) | s \rangle$ zu gelangen, betrachten wir als eine Basis unseres Zustandsraumes mit indefiniter Metrik einen Zustand positiver Norm $|\tilde{E}_1\rangle$ und zu diesem orthogonale Zustände mit Norm Null $|\tilde{G}\rangle$ und $|\tilde{G}^*\rangle$, für die $\langle \tilde{E}_1 | \tilde{G} \rangle = \langle \tilde{E}_1^* | \tilde{G}^* \rangle = 0$, aber $\langle \tilde{E}_1 | \tilde{G}^* \rangle = \langle \tilde{E}_1^* | \tilde{G} \rangle = 1$. Dabei wird diese Basis so gewählt, daß das Matrixelement gemäß

$$\begin{aligned} \langle s | U(t-t_0) | s \rangle &= |\langle s | \tilde{E}_1 \rangle|^2 \langle \tilde{E}_1 | U(t-t_0) | \tilde{E}_1 \rangle + \\ &+ \langle s | \tilde{G} \rangle \langle \tilde{G}^* | s \rangle \langle \tilde{G}^* | U(t-t_0) | \tilde{G} \rangle + \langle s | \tilde{G}^* \rangle \langle \tilde{G} | s \rangle \langle \tilde{G} | U(t-t_0) | \tilde{G}^* \rangle \end{aligned} \quad (6.21)$$

zerlegt werden kann.

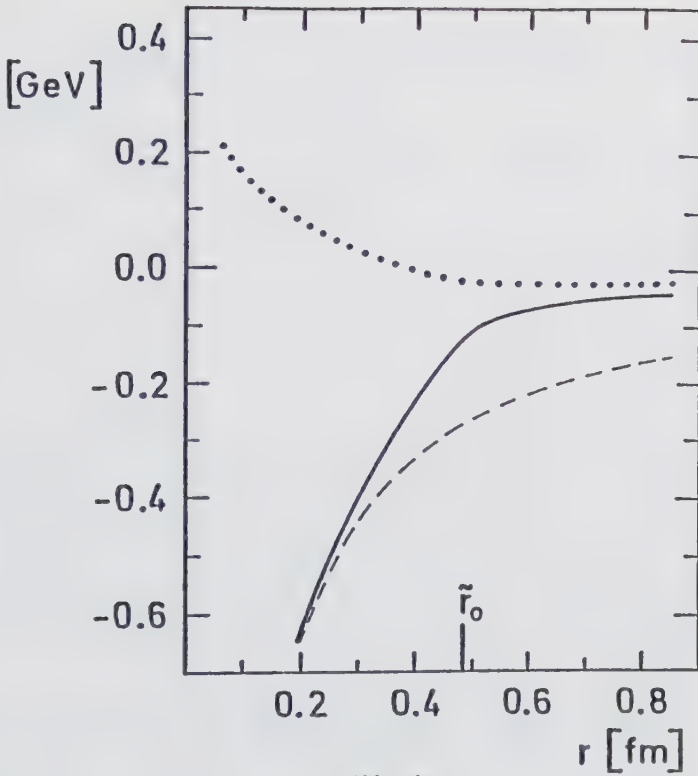


Abb. 6a

Dargestellt ist die statische Energie $\tilde{E}_A(r)$ (—) und der Realteil von $\tilde{E}_A(r)$ ($\cdots$), für $\gamma = 0,0$ GeV und $\alpha_s = 0,5$. Zum Vergleich wurde auch die Coulomb-Energie (----) aufgetragen.

Durch Vergleich mit (6.19) identifizieren wir

$$|\langle s | \tilde{E}_A \rangle|^2 = \tilde{c}_A$$

(6.22)

$$\langle \tilde{E}_A | U(t-t_0) | \tilde{E}_A \rangle = e^{-i \tilde{E}_A (t-t_0)}$$

und

$$\langle s | \tilde{G} \rangle \langle \tilde{G}^* | s \rangle = \tilde{c}_1$$

$$\langle s | \tilde{G}^* \rangle \langle \tilde{G} | s \rangle = \tilde{c}_1^*$$

$$\langle \tilde{G}^* | U(t-t_0) | \tilde{G} \rangle = e^{-i \tilde{E}_2 (t-t_0)} \quad (6.23)$$

$$\langle \tilde{G} | U(t-t_0) | \tilde{G}^* \rangle = e^{-i \tilde{E}_2^* (t-t_0)}$$

Es sei hervorgehoben, daß nach Abb. 5 $|\langle s | \tilde{E}_1 \rangle|^2 = \tilde{c}_1 > 0$. Aus (6.22) folgt, daß der Zustand $|\tilde{E}_1\rangle$ ein stationärer Zustand des Systems ist und, mit $t=t_0$, daß er mit positiver Norm wie $\langle \tilde{E}_1 | \tilde{E}_1 \rangle$ normiert ist. Die Annahme, daß die Zustände $|\tilde{E}_1\rangle$, $|\tilde{G}\rangle$ und $|\tilde{G}^*\rangle$ eine Basis im Zustandsraum mit indefiniter Metrik bilden, erweist sich als konsistent. Innerhalb der durchgeführten Näherungen sind diese Zustände die Eigenzustände des Hamiltonoperators (3.1) des Gesamtsystems.

Wir identifizieren den Eigenzustand $|\tilde{E}_1\rangle$ als den physikalischen, stationären gebundenen Zustand des Gesamtsystems der wechselwirkenden statischen $Q\bar{Q}$ - und gluonischen Systeme, in der zweiten Beschreibungsebene nun mit Einschluß der adjungierten $\leftrightarrow$ adjungierten Wechselwirkung. Der entsprechende Eigenwert $\tilde{E}_1(r)$ ist die attraktive statische Energie des Gesamtsystems. Er ist in Abb. 6 als Funktion des $Q\bar{Q}$ -Abstandes r dargestellt. Andererseits sind die Eigenzustände $|\tilde{G}\rangle$ und $|\tilde{G}^*\rangle$, mit Norm Null und komplexen Eigenwerten, als unphysikalisch zu betrachten.

Wie wir in Abb. 6 feststellen, hat die statische Energie $\tilde{E}_1(r)$ nicht mehr das singuläre Verhalten bei einem kritischen $Q\bar{Q}$ -Abstand r_c , wie bei unserer ersten Beschreibungsebene, wo die adjungierte $\leftrightarrow$ adjungierte Wechselwirkung nicht berücksichtigt wurde (vgl. Abb. 4), und ist nun für alle $Q\bar{Q}$ -Abstände r definiert. Trotzdem kann auch hier ein kritischer $Q\bar{Q}$ -Abstand festgestellt werden. In Abb. 5 stellen wir fest, daß bei einem $Q\bar{Q}$ -Abstand $r=\tilde{r}_0$ die "Wahrscheinlichkeit" $|\langle s | \tilde{E}_1 \rangle| = \tilde{c}_1$ kleiner als eins wird und $2 \operatorname{Re}(\tilde{c}_1)$ das Vorzeichen wechselt. Außerdem sehen wir in Abb. 7, daß bei diesem $Q\bar{Q}$ -Abstand $\tilde{r}_0$ die Änderungsrate des Imaginärteils von $\tilde{c}_1$

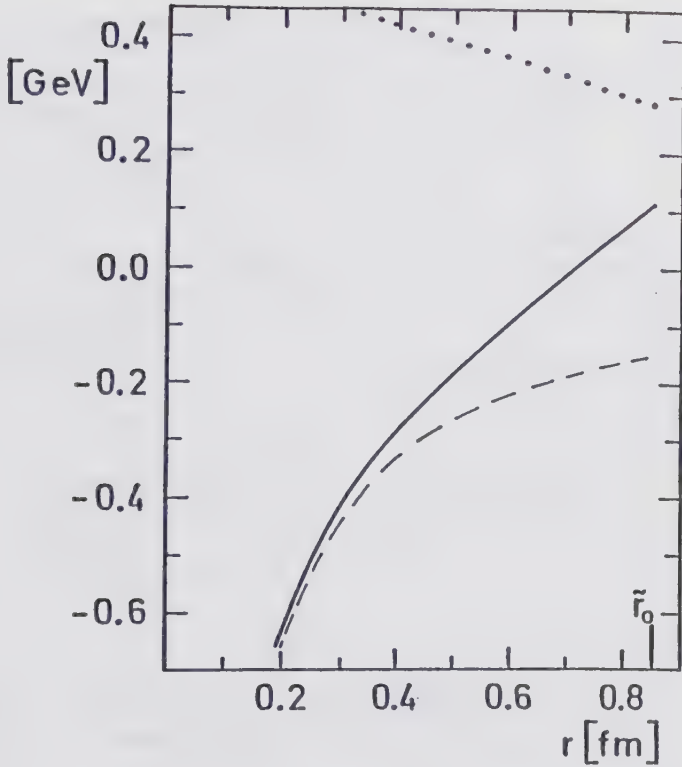


Abb. 6b

Gleiche Darstellung wie in Abb. 6a für $\gamma = 0,4$ GeV.

unstetig ist. Dies mag eine Änderung der physikalischen Eigenschaften des Systems bei $r = \tilde{r}_0$ signalisieren. Es ist dann interessant, daß für $Q\bar{Q}$ -Abstände $r > \tilde{r}_0$ die statische Energie $E_A(r)$ abflacht, wie wir in Abb. 6a feststellen.

In diesem Zusammenhang ist es interessant, den Grenzfall $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ bei festem γ , der einem Abschalten der adjungierten $\leftrightarrow$ adjungierten Wechselwirkung in der Lösung (6.19) von (6.18) entspricht, zu untersuchen. In diesem Grenzfall nähert sich der $Q\bar{Q}$ -Abstand $\tilde{r}_0$ dem kritischen $Q\bar{Q}$ -Abstand r_0 und $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ ändern sich mit $\tilde{\gamma}$ so, daß für $r < \tilde{r}_0$ die Lösung (6.19) in die Lösung (6.5) der ersten Beschreibungsebene übergeht, während für $r > \tilde{r}_0$ (6.19) in die entsprechende Lösung (6.15) übergeht.

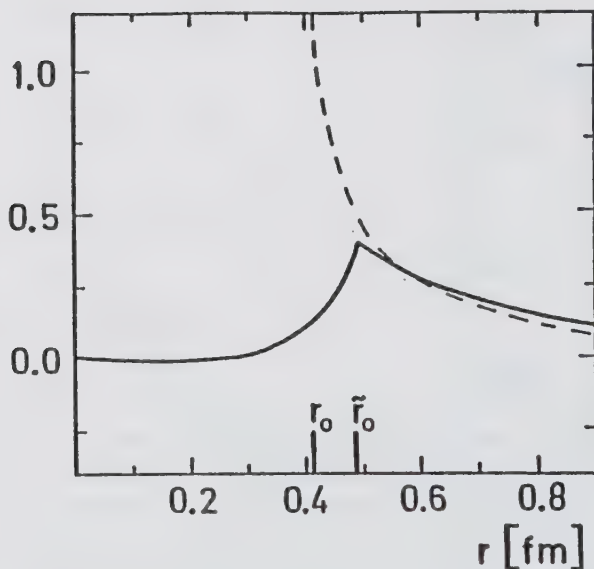


Abb. 7

Dargestellt ist der Imaginärteil von $C_A(r)$ (----) und der Imaginärteil von $\tilde{C}_L(r)$ (—) .

Insbesondere wird in diesem Grenzfall $\tilde{C}_A = |\langle s | \tilde{E}_A \rangle|^2 = 0$ für $r > r_0$; die "Wahrscheinlichkeit", den physikalischen Eigenzustand $|\tilde{E}_A\rangle$ im Zustand $|s\rangle$ zu finden, verschwindet in diesem Grenzfall für $r > r_0$.

Das Erscheinen dieser kritischen Abstände r_0 bzw. $\tilde{r}_0$ mag auch eine Grenze der Anwendbarkeit der durchgeführten Näherungen signalisieren. Für große $Q\bar{Q}$ -Abstände wird eine solche Grenze aus zwei Gründen erreicht. Erstens wird die Dipolnäherung, der der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator (3.1) zugrundeliegt, nicht mehr gültig sein, wenn der $Q\bar{Q}$ -Abstand der Wellenlänge der gluonischen Fluktuationen vergleichbar wird. Und zweitens wird für $r > r_0$ die Energiedifferenz zwischen der Singlett- und der adjungierten Konfiguration klein, so daß die Wahrscheinlichkeit

groß wird, daß das $Q\bar{Q}$ - und das gluonische System sich für eine lange Zeit jeweils in der adjungierten Darstellung befinden. Dann ist auch die Annahme nicht mehr gerechtfertigt, daß diese Zeit kurz ist gegenüber der Zeitskala der gluonischen Fluktuationen.

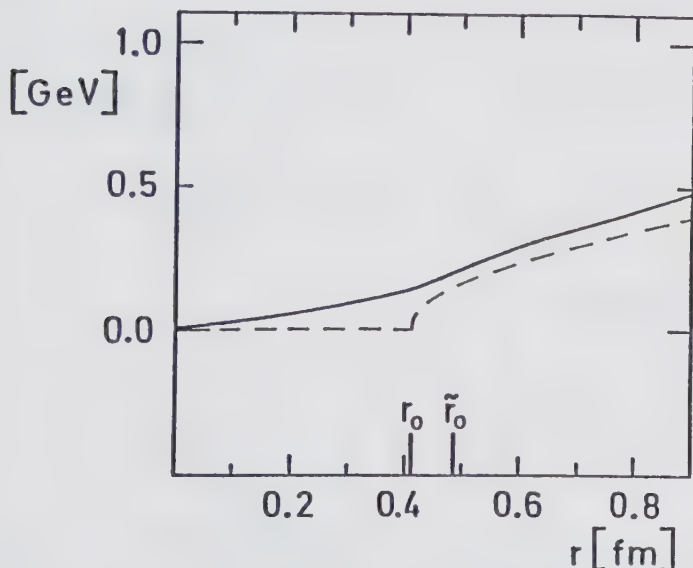


Abb. 8

Dargestellt ist der Imaginärteil von $E_1(r)$ (----) und der Imaginärteil von $\tilde{E}_2(r)$ (—)

In diesem Abschnitt haben wir für das Gesamtsystem der wechselwirkenden statischen Quark-Antiquark- und Gluonenkondensat-Systeme in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik einen physikalischen Eigenzustand mit positiver Norm identifiziert und, als den entsprechenden Eigenwert, die statische Energie des Systems bestimmt. Die anderen Eigenzustände hatten negative Norm bzw. Norm Null und wurden dementsprechend als unphysikalisch betrachtet.

7. Die statische Energie als Potential

Die schweren Quarkonium-Systeme, Charmonium und Bottomonium, werden erfolgreich im Rahmen phenomenologischer Potentialmodelle beschrieben^(8,15). Wie es schon im Abschnitt 1 dargestellt wurde, sind diese phenomenologischen Potentiale flavourunabhängig und im wesentlichen logarithmisch für QQ-Abstände zwischen $0,1 \text{ fm}$ und $1,0 \text{ fm}$. In den Abbildungen 9a und 9b werden diese Potentiale, wegen der logarithmischen Skala durch eine Gerade dargestellt, deren Steigung aus⁽¹⁵⁾ entnommen wurde, mit der im vorherigen Abschnitt bestimmten statischen Energie $E_s(r)$ bzw. $\tilde{E}_s(r)$ verglichen. Bei der Bestimmung der statischen Energie wurde für die starken

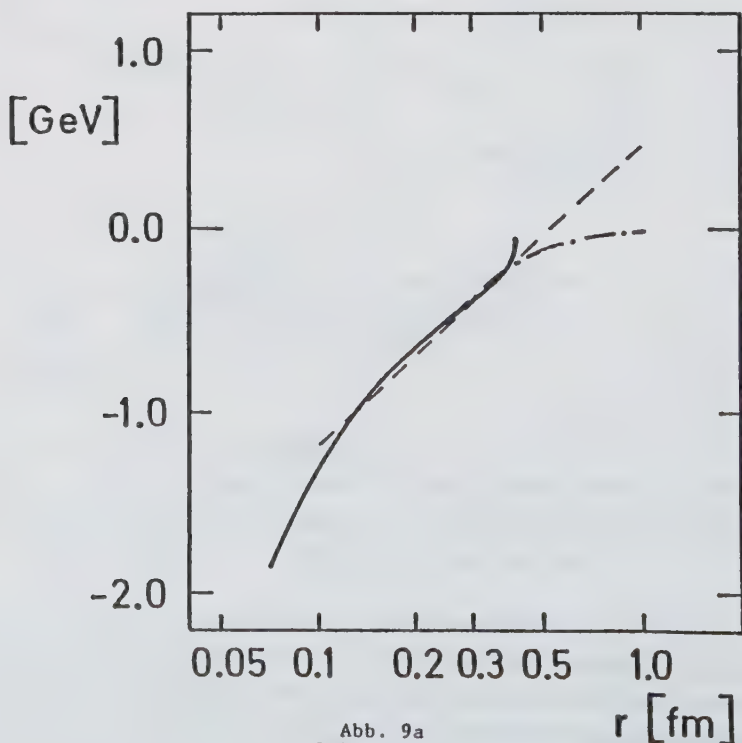


Abb. 9a

Logarithmische Darstellung der statischen Energie $E_s(r)$ (—) und $\tilde{E}_s(r)$ (-·-·-) im Vergleich mit dem charakteristischen Verhalten phenomenologischer Potentiale zwischen $0,1 \text{ fm}$ und $1,0 \text{ fm}$ (-----) für $\alpha_s = 0,5$ und $\gamma = 0,0 \text{ GeV}$.

Feinstrukturkonstante ein skaleninvarianter ^{*)} Wert von $\alpha_s = 0,5$ ^{**)} angenommen. In Abb. 9a kann eine gute Übereinstimmung zwischen der statischen Energie und den phenomenologischen Potentialen bis zu einem $Q\bar{Q}$ -Abstand von 0,4 fm. festgestellt werden. Hier wurde der die gluonische Energie in der adjungierten Darstellung beschreibende Parameter γ (5.10) gleich Null gesetzt.

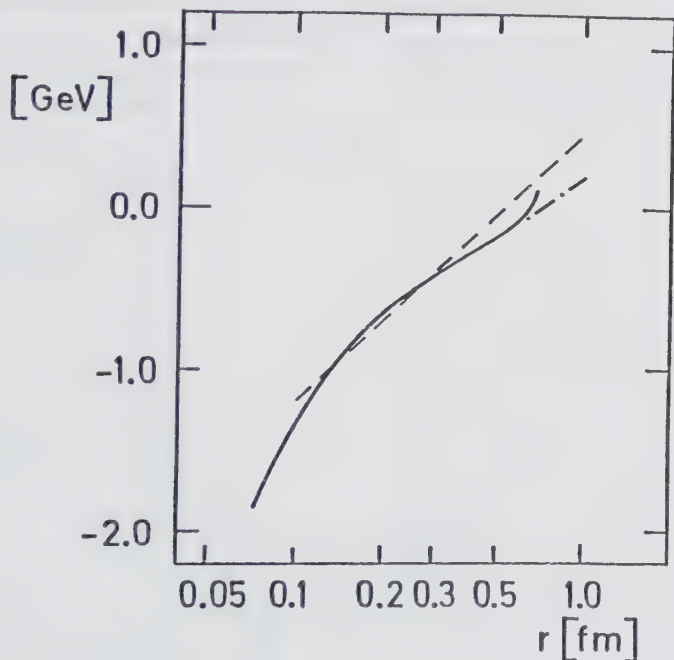


Abb. 9b

Gleiche Darstellung wie in Abb. 9a für $\gamma = 0,4$ GeV.

*) Um die Diskussion zu vereinfachen, wurde die Skalenabhängigkeit von α_s vernachlässigt. Mit störungstheoretischen Methoden könnte sie auch nur bis zu Abständen von höchstens 0,2 fm. bestimmt werden.

***) Ein Wert von $\alpha_s = 0,5$ erscheint hier als eine angebrachte Extrapolation, wenn bei den QCD-Summenregeln ein Wert von $\alpha_s = 0,3$ (siehe Seite 19) bei einer der doppelten Masse des Charm-Quarks entsprechenden Skala von etwa 0,1 fm verwendet wurde.

In der Abb. 9b stellt man fest, daß für einen - willkürlich gewählten - Wert von $\gamma = 0,4$ GeV die Übereinstimmung nicht so gut ist. Dies kann als ein Hinweis darauf gesehen werden, daß γ gleich Null oder zumindest klein ist.

Der gleiche Sachverhalt ist noch einmal in den Abbildungen 10a und 10b dargestellt, nun auf eine lineare Skala bezogen. In der Abb. 10a wird deutlich, wie sich die statische Energie von der Coulomb-Energie abhebt und, für $\gamma = 0,0$ GeV, sich dem Verlauf der phenomenologischen Potentialen bis zu einem $Q\bar{Q}$ -Abstand von $0,4$ fm angleicht. In der Abb. 10b kann man dagegen feststellen, daß für $\gamma = 0,4$ GeV die statische Energie zu flach verlaufen würde.

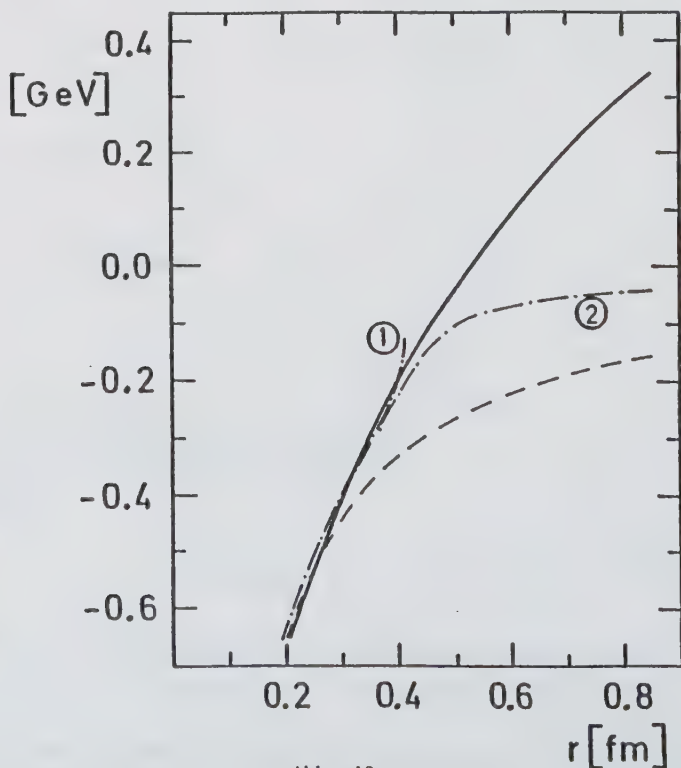


Abb. 10a

Darstellung der statischen Energie $E_1(r)$ (①) und $\tilde{E}_1(r)$ (②) (----) im Vergleich mit dem logarithmischen Verhalten phenomenologischer Potentiale (—) zwischen $0,1$ fm und $1,0$ fm und der Coulomb-Energie (-----) für $\alpha_s = 0,5$ und $\gamma = 0,0$ GeV.

Es stellt sich nun die Frage, ob die hier bestimmte statische Energie direkt als Potential zur Bestimmung der Spektraleigenschaften schwerer Quarkonium-Systeme verwendet werden kann^{*)}. Dies ist bei dem vorliegenden Zugang keineswegs gewährleistet, da die Wechselwirkung zwischen dem $Q\bar{Q}$ -System und den gluonischen Fluktuationen sich ändert, wenn Quark und Antiquark nicht mehr im Raum festgehalten werden. Die statische Energie wurde aus der fundamentalen dynamischen Gleichung (4.17) im statischen Grenzfall berechnet. Dabei wurde insbesondere der kinetische Term bei der Berechnung des Integralkerns (4.14) vernachlässigt. Für ein realistisches, nicht-statisches System ist aber aufgrund des Virialsatzes zu

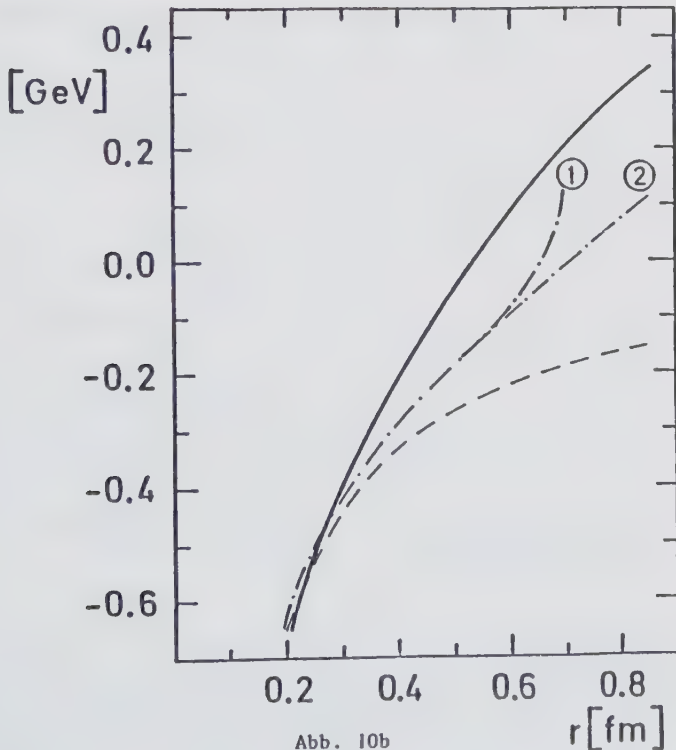


Abb. 10b

Gleiche Darstellung wie Abb. 10a für $\chi = 0,4$ GeV

*) In einem verwandten Zusammenhang wurde diese Frage in ⁽¹⁸⁾ diskutiert.

erwarten, daß der Erwartungswert der kinetischen Energie von der gleichen Größenordnung wie der Erwartungswert der potentiellen Energie ist. Demzufolge mag es nicht gerechtfertigt sein, für ein solches System den der kinetischen Energie entsprechenden Term dort zu vernachlässigen.

Dieser Sachverhalt kann etwas deutlicher hervorgehoben werden. Dazu betrachten wir den in (5.13) gegebenen Integralkern

$$W(t-t') = -\gamma \tau_i e^{-i\left(\frac{p_i^2}{m} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_i}{r} + \delta\right)(t-t')} \tau_i P_s \quad (7.1)$$

den wir auch wie

$$W(t-t') = -\gamma e^{-i\left(\frac{1}{6} \frac{\alpha_i}{r} + \delta\right)(t-t')} \tau_i e^{-i\left(\frac{1}{6} \frac{\alpha_i}{r}\right)(t-t')} e^{-i\left(\frac{p_i^2}{m} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_i}{r}\right)(t-t')} \tau_i P_s \quad (7.2)$$

schreiben können. Nun entwickeln wir die Exponentiale zwischen den Ortsoperatoren τ_i und erhalten, unter Verwendung von $[p_i^2, \tau_i] = -i 2 p_i$ in erster Ordnung in $(t-t')$

$$W(t-t') = -\gamma e^{-i\left(\frac{1}{6} \frac{\alpha_i}{r} + \delta\right)(t-t')} \left(\tau_i^2 - \frac{i(t-t')}{m} (r^2 p^2 - i 2 (\tau_i p_i)) + \dots \right) P_s \quad (7.3)$$

Wenn wir nur den ersten Term dieser Entwicklung berücksichtigen, erhalten wir den Integralkern im statischen Grenzfall, wie er in (5.14) angegeben wurde. Nun können wir das Verhältnis des zweiten Term zum ersten abschätzen. Dazu verwenden wir, daß als Folge des Virialsatzes $\frac{p^2}{m} \sim \frac{\alpha_i}{r}$ für das gebundene System. Außerdem ist $p_i \tau_i \sim 1$ und das Zeitintervall $(t-t')$ ist umgekehrt proportional zur Differenz zwischen den Energien der Singulettkonfiguration und der adjungierten Konfiguration, so daß $(t-t') \sim \frac{r}{\alpha_i}$. Damit ergibt sich für die Verhältnisse

$$\frac{\frac{(t-t')}{m} r^2 p^2}{r^2} = \frac{p^2}{m} (t-t') \sim 1 \quad (7.4)$$

und

$$\frac{\frac{(t-t')}{m} 2 (\tau_i p_i)}{r^2} \sim \frac{1}{m \alpha_i r} \sim 1 \quad (7.5)$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, daß der Bohrsche Radius $1/m\alpha_s$ von der Größenordnung von r ist.

Aus dieser recht groben Abschätzung folgt, daß die höheren Terme der Entwicklung des Integralkerns von der gleichen Größenordnung wie der statische Term sein können. Ihre Vernachlässigung ist somit für ein realistisches, nicht-statisches $Q\bar{Q}$ -Bindungssystem nicht gerechtfertigt. Allerdings könnte sich die Bestimmung der statischen Energie als geeignete Grundlage für Näherungen zur Berechnung der Spektraleigenschaften schwerer Quarkonium-Systeme erweisen.

Wir vergleichen nun unsere Resultate für die statische Energie mit den Ergebnissen der früheren Arbeit von Flory⁽¹⁷⁾. Dazu betrachten wir eine Näherung zu unserer dynamischen Gleichung (4.16), die zu dem Ausgangspunkt der Betrachtungen von Flory führt. Der Zeitentwicklungsoperator $U(t'-t_0)$ in (4.16) kann gemäß $U(t'-t_0) = U(t'-t) U(t-t_0)$ zerlegt werden. Nun nähern wir $U(t'-t)$ durch die Lösung der Schrödingergleichung ohne den Wechselwirkungsterm. In dieser Näherung ist

$$\langle 0 | P_3 U(t'-t_0) P_3 | 0 \rangle = e^{-i \left(\frac{p^2}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right) (t'-t)} \langle 0 | P_3 U(t-t_0) P_3 | 0 \rangle \quad (7.6)$$

und aus der dynamischen Gleichung (4.16) wird

$$i \frac{d}{dt} \langle 0 | P_3 U(t-t_0) P_3 | 0 \rangle = H_3(t-t_0) \langle 0 | P_3 U(t-t_0) P_3 | 0 \rangle \quad (7.7)$$

mit dem Hamiltonoperator

$$H_3(t-t_0) = \frac{p^2}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} - i \int_0^{(t-t_0)} d\tilde{t} \tilde{W}(\tilde{t}) e^{i \left(\frac{p^2}{m} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right) \tilde{t}} \quad (7.8)$$

in dem $\tilde{W}(\tilde{t})$ der durch (4.13) gegebene Integralkern ist. Der Hamiltonoperator (7.8) wirkt nur auf den Unterraum der Colorsinglettzustände. Er hängt ab von dem Zeitintervall $(t-t_0)$ das vergangen ist, seitdem das System zur Zeit t_0 präpariert wurde. Betrachten wir ein bei $t_0 \rightarrow -\infty$ in einem asymptotischen Colorsinglettzustand präpariertes System, für das das Zeitintervall $(t-t_0)$ groß gegenüber der durch die Energiedifferenz der Singlettconfiguration und der adjungierten Konfiguration festgelegten

Zeitskala ist. Dann wird im statischen Grenzfall

$$H_5 = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_f}{r} - i \int_0^{\infty} d\tilde{r} \, W(\tilde{r}) e^{i \left(-\frac{4}{3} \frac{\alpha_f}{r}\right) \tilde{r}} \quad (7.9)$$

Dieses statische Potential war der Ausgangspunkt der Arbeit von Flory⁽¹⁷⁾. Wir haben es aus der dynamischen Gleichung (4.16) durch ein Näherungsverfahren erhalten, das für hinreichend kleine $Q\bar{Q}$ -Abstände gerechtfertigt erscheint. In der Tat erhält man, bei Vernachlässigung der adjungierten $\longleftrightarrow$ adjungierten Wechselwirkung (erste Beschreibungsebene) und mit dem Ausdruck (5.14) für den Integralkern $W(\tilde{r})$, nach Ausführung

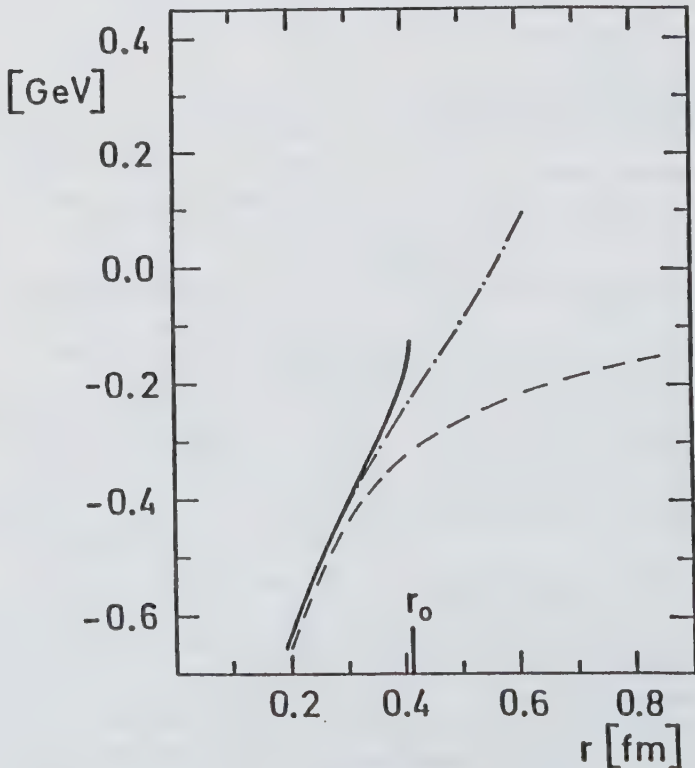


Abb. 11

Darstellung der statischen Energie $E_1(r)$ (—) im Vergleich mit der Näherung (7.10) (-·-·-) und dem Coulombpotential (----).

des. Integrals,

$$H_s = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \frac{r^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma\right)} \quad (7.10)$$

was genau den ersten Termen der für kleine r gültigen Entwicklung (6.14) der statischen Energie $E_s(r)$ entspricht, die im vorherigen Abschnitt abgeleitet wurde. Wir haben in der Abb. 11 diese Näherung im Vergleich mit der statischen Energie $E_s(r)$ dargestellt.

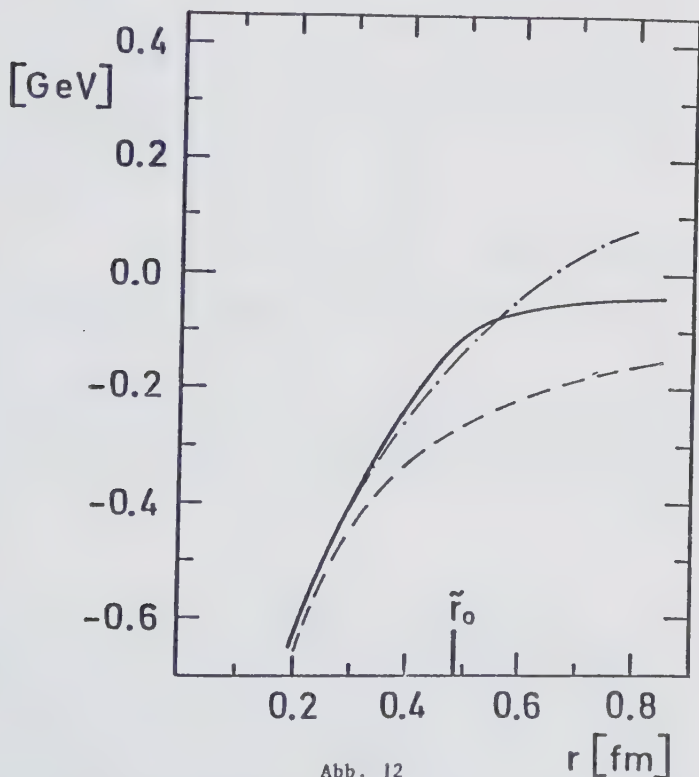


Abb. 12

Darstellung der statischen Energie $\tilde{E}_s(r)$ (—) im Vergleich mit der Näherung (7.11) (-·-·-) und dem Coulombpotential (----).

In der zweiten Beschreibungsebene, in der wie auch bei Flory die adjungierte $\leftrightarrow$ adjungierte Wechselwirkung berücksichtigt wird, erhalten wir mit dem Ausdruck (5.25) für den Integralkern $W(\tilde{x})$ nach Ausführung des Integrals

$$\tilde{H}_s = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} - \gamma \frac{r^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \frac{r^2}{2 \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right)} \right)} \quad (7.11)$$

Wir haben in Abb. 12 diese Näherung im Vergleich mit der statischen Energie $\tilde{E}_s(r)$ dargestellt. Allerdings stimmt das Ergebnis (7.11) nicht mit dem Resultat von Flory⁽¹⁷⁾ überein, da in seiner Arbeit bei der Berechnung des Integralkerns $W(\tilde{t})$ anders als hier vorgegangen wurde. Während hier im Rahmen der im Zusammenhang mit (4.11) gemachten Annahme, daß eine Vernachlässigung aller gluonischen Colorsinglettzustände außer dem Vakuumzustand zulässig sei, die Berechnung des Integralkerns $W(\tilde{t})$ (4.13) exakt für SU(3) Color ist, behauptet Flory⁽¹⁷⁾ nur den führenden Term einer Entwicklung in $1/N_c$, wo N_c die Anzahl der Colors ist, zu erhalten.

Wir möchten schließlich noch einmal hervorheben, daß der Zugang von Flory⁽¹⁷⁾ sich aus einer für kleine $Q\bar{Q}$ -Abstände gültigen Näherung zu dem in dieser Arbeit dargestellten Zugang ergibt. Demzufolge können seine Ergebnisse nicht für $Q\bar{Q}$ -Abstände größer als 0,4 fm als zuverlässig betrachtet werden, da sie ab diesem Abstand stark von den hier berechneten abweichen.

8. Zusammenfassung der Ergebnisse

In dieser Arbeit wurde der Einfluß des Gluonenkondensats auf ein Coulombartiges Bindungssystem von schweren Quark und Antiquark untersucht. Die Wechselwirkung beider Systeme wurde in Dipolnäherung betrachtet. Angestrebt war, die Dynamik in Abhängigkeit des Gluonenkondensat-Parameters $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ zu beschreiben. Der negative Wert von $\langle 0 | E_i^a E_i^a | 0 \rangle$ führte zur Einführung eines Zustandraumes mit indefiniter Metrik.

Bei Vernachlässigung einer Beimischung von Glueball-Zuständen konnte eine dynamische Gleichung für den Vakuumerwartungswert des Zeitentwicklungsoperators des Gesamtsystems abgeleitet werden. Sie beschreibt, in

Abhängigkeit von $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_a^{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} | 0 \rangle$, die zeitliche Entwicklung des $Q\bar{Q}$ -Systems in Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat. Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung würde die Bestimmung des Spektrums des Systems erlauben.

Hier wurde der statische Grenzfall betrachtet, in dem diese Gleichung exakt gelöst werden konnte. Aus ihrer Lösung wurde, im Zustandsraum mit indefiniter Metrik, der physikalische Eigenwert des Systems identifiziert. Durch den zugehörigen Eigenwert ist die statische Energie des $Q\bar{Q}$ -Systems in Wechselwirkung mit dem Gluonenkondensat gegeben. Es wurde dargelegt, daß für Quark-Antiquark-Abstände größer als ein kritischer Abstand von 0,4 fm. die durchgeführten Näherungen nicht mehr gerechtfertigt erscheinen.

Bis zu einem Abstand von 0,4 fm. stimmt die hier abgeleitete statische Energie gut mit den phenomenologischen Potentialen überein. Allerdings erscheint es bei diesem Zugang als nicht konsistent, die statische Energie als Potential zu verwenden.

Schließlich wurde gezeigt, daß der Zugang von Flory⁽¹⁷⁾ sich aus einer Näherung zu dem hier vorgestellten Zugang ergibt, so daß seine Ergebnisse auch nicht für Abstände größer als 0,4 fm. gültig sein können.

ANHANG A

Der Zusammenhang zwischen $\frac{\alpha_j}{\pi} \langle 0 | \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} | 0 \rangle$ und $\frac{\alpha_j}{\pi} \langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle$ und $\frac{\alpha_j}{\pi} \langle 0 | B_i^a B_j^a | 0 \rangle$ wird aufgezeigt.

Als Folge der angenommenen Lorentz-Invarianz des Vakuumzustandes $|0\rangle$ gilt

$$\langle 0 | \mathcal{G}_{\mu\alpha}^a \mathcal{G}^{a\mu\beta} | 0 \rangle = \frac{1}{4} g_{\alpha}^{\beta} \langle 0 | \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} | 0 \rangle \quad (\text{A.1})$$

und somit, in irgendeinem Bezugssystem

$$\langle 0 | \mathcal{G}_{\mu 0}^a \mathcal{G}^{a\mu 0} | 0 \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 | \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} | 0 \rangle \quad (\text{A.2})$$

Da $\mathcal{G}_{\mu 0}^a \mathcal{G}^{a\mu 0} = -E_k^a E_k^a$ ist, folgt

$$\langle 0 | E_k^a E_k^a | 0 \rangle = -\frac{1}{4} \langle 0 | \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} | 0 \rangle \quad (\text{A.3})$$

Andererseits ist $\mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} = -2 E_k^a E_k^a + 2 B_k^a B_k^a$ und somit

$$\langle 0 | \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} | 0 \rangle = -2 \langle 0 | E_k^a E_k^a | 0 \rangle + 2 \langle 0 | B_k^a B_k^a | 0 \rangle \quad (\text{A.4})$$

Mit (A.3) folgt daraus

$$-\langle 0 | E_k^a E_k^a | 0 \rangle = \langle 0 | B_k^a B_k^a | 0 \rangle \quad (\text{A.5})$$

Weiterhin gilt, als Folge der Rotationsinvarianz des Vakuums,

$$\langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle 0 | E_k^a E_k^a | 0 \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\langle 0 | B_i^a B_j^a | 0 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle 0 | B_k^a B_k^a | 0 \rangle$$

Aus (A.3), (A.5), (A.6) und $\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle = \left(\frac{18}{\pi^2} \right) \gamma$ folgt dann

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | E_i^a E_j^a | 0 \rangle = - \left(\frac{3}{2\pi^2} \right) \gamma \delta_{ij} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\alpha_s}{\pi} \langle 0 | B_i^a B_j^a | 0 \rangle = \left(\frac{3}{2\pi^2} \right) \gamma \delta_{ij} \quad (\text{A.8})$$

ANHANG B

In diesem Anhang geben wir eine kurze Übersicht über die Zustandsräume mit indefiniter Metrik. Dabei folgen wir der Formulierung von Nagy⁽³⁶⁾ und Nakanishi⁽³⁷⁾. Wir beschränken uns auf Räume mit endlicher Dimension.

Ein linearer Vektorraum mit Elementen $|A\rangle, |B\rangle, \dots$ ist ein Zustandsraum mit indefiniter Metrik, wenn man zu allen Zuständen $|A\rangle, |B\rangle$ eine komplexe Zahl $\langle A|B\rangle$ - das Skalarprodukt - zuordnen kann mit den Eigenschaften

$$\langle A|B\rangle = (\langle B|A\rangle)^* \quad (\text{B.1})$$

und

$$\langle A|(\beta|B\rangle + \gamma|C\rangle) = \beta\langle A|B\rangle + \gamma\langle A|C\rangle \quad (\text{B.2})$$

Im Gegensatz zu einem Zustandsraum mit positiver Metrik werden folgende Eigenschaften nicht gefordert

$$\langle A|A\rangle \geq 0$$

und

$$\langle A|A\rangle = 0 \longrightarrow |A\rangle = 0 \quad (\text{B.3})$$

Wegen (B.1) ist das Skalarprodukt immer eine reelle Zahl. Zwei Zustände $|A\rangle$ und $|B\rangle$ sind orthogonal, wenn $\langle A|B\rangle = 0$. Das Skalarprodukt eines Zustandsvektors mit sich selbst nennen wir die Norm des Zustandsvektors. Da (B.3) nicht gefordert wird, haben wir Zustände mit positiver Norm, wenn $\langle A|A\rangle > 0$, mit negativer Norm, wenn $\langle A|A\rangle < 0$ und mit Norm Null, wenn $\langle A|A\rangle = 0$.

Wir werden uns auf Zustandsräume mit nicht entarteter Metrik beschränken. Dies bedeutet, daß im Zustandsraum kein Zustandsvektor $|A\rangle$ mit Norm Null und orthogonal zu allen anderen Zustandsvektoren enthalten ist. Dann existieren orthonormale Vektoren $|n\rangle$

$$\langle m|m\rangle = N_m \delta_{mm}, \quad N_m = \pm 1 \quad (\text{B.4})$$

die eine Basis des Zustandsraumes bilden.

Wir betrachten nun lineare Operatoren in diesem Zustandsraum. Ein Operator O^+ ist hermitesch konjugiert zu O , wenn

$$\langle A | O^+ | B \rangle = (\langle B | O | A \rangle)^* \quad (B.5)$$

Ein Operator H ist hermitesch, wenn $H = H^+$. Sei

$$H | E_m \rangle = E_m | E_m \rangle \quad (B.6)$$

mit $| E_m \rangle$ Eigenzustand und E_m Eigenwert von H . Für H hermitesch gilt dann

$$(E_m - E_m^*) \langle E_m | E_m \rangle = 0 \quad (B.7)$$

und

$$(E_m - E_m^*) \langle E_m | E_m \rangle = 0 \quad (B.8)$$

Die Eigenwerte E_m können komplex sein. Für jeden Eigenzustand $| E_m \rangle$ mit komplexem Eigenwert E_m existiert*) ein Eigenzustand $| E_m^* \rangle$ mit dem komplex konjugierten Eigenwert E_m^* . Für komplexe Eigenwerte folgt aus (B.7), daß der zugehörige Eigenzustand Norm Null haben muß. Aus (B.8) folgt, daß Eigenzustände $| E_m \rangle, | E_m^* \rangle$ mit $E_m \neq E_m^*$ orthogonal sind. Eigenzustände zu komplex konjugierten Eigenwerten brauchen nach (B.8) nicht orthogonal zu sein.

Wir untersuchen nun die Zerlegung des Einheitsoperators nach den Eigenzuständen eines Hermiteschen Operators. Um die Diskussion zu vereinfachen, berücksichtigen wir nicht eine mögliche Entartung der Eigenzustände. Ein Projektionsoperator auf einem durch Eigenzustände mit nichtverschwindender Norm aufgespannten Unterraum ist durch

*) Dies folgt aus dem fundamentalen Theorem der Algebra, angewandt auf das charakteristische Polynom von H . Für eine detaillierte Diskussion siehe (37).

$$\pi_1 = \sum_n N_n |E_n\rangle \langle E_n|, \quad N_n = \pm 1 \quad (\text{B.9})$$

gegeben. Eigenzustände $|E_n\rangle$ zu komplexem Eigenwert E_n haben Norm Null, sind aber jeweils nicht orthogonal zu dem Eigenzustand $|E_n^*\rangle$ zum komplex konjugierten Eigenwert E_n^* . Ein Projektionsoperator auf den durch diese Eigenzustände aufgespannten Unterraum ist dann durch

$$\pi_2 = \sum_n |E_n^*\rangle \langle E_n^*| \quad (\text{B.10})$$

gegeben. Für die im Abschnitt 7 durchgeführte Diskussion ist es hinreichend, sich auf einen Zustandsraum mit indefiniter Metrik zu beschränken, in dem die Zerlegung des Einheitsoperators gemäß

$$1 = \pi_1 + \pi_2 \quad (\text{B.11})$$

vollständig ist^{*)}.

*) Für eine ausführliche Diskussion der Vollständigkeit der Eigenzustände eines Hermiteschen Operators in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik verweisen wir auf (37).

ANHANG C

Wir betrachten eine Color $SU(N)$ Symmetriegruppe. Die (N^2-1) -Generatoren λ_a der fundamentalen Darstellung der Quark-Zustände $|q_\alpha\rangle$ werden durch

$$\delta_{\rho\nu} (\lambda_a)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \delta_{a\delta} \quad (C.1)$$

normiert. Die Generatoren der ladungskonjugierten Darstellung der Anti-quarkzustände $|\bar{q}_\rho\rangle$ sind durch $\bar{\lambda}_a = -\lambda_a^T$ gegeben.

Im N^2 -dimensionalen direktem Produktraum der beiden Darstellungen mit den Zuständen $|q_\alpha\rangle \otimes |\bar{q}_\rho\rangle = |q_\alpha \bar{q}_\rho\rangle$ des Quark-Antiquark Systems betrachten wir die Operatoren

$$Q_a = \lambda_a \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\lambda}_a = \quad (C.2)$$

$$= \sum_{\alpha\beta, \delta\delta} |q_\alpha \bar{q}_\rho\rangle \left((\lambda_a)_{\alpha\delta} \delta_{\rho\delta} - \delta_{\alpha\delta} (\lambda_a)_{\delta\rho} \right) \langle q_\delta \bar{q}_\delta |$$

und

$$d_a = \lambda_a \otimes 1 - 1 \otimes \bar{\lambda}_a = \quad (C.3)$$

$$= \sum_{\alpha\beta, \delta\delta} |q_\alpha \bar{q}_\rho\rangle \left((\lambda_a)_{\alpha\delta} \delta_{\rho\delta} + \delta_{\alpha\delta} (\lambda_a)_{\delta\rho} \right) \langle q_\delta \bar{q}_\delta |$$

die in die Definition des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators (3.15) eingehen. Der direkte Produktraum zerfällt in die direkte Summe eines ein-dimensionalen Raumes von Colorsinglett-Zuständen $|\Sigma\rangle$ und eines (N^2-1) -dimensionalen Raumes von Zuständen $|X\rangle$ der adjungierten Darstellung. Zu diesen Räumen haben wir die entsprechenden Projektionsoperatoren^{*)}

$$P_\Sigma = |\Sigma\rangle \langle \Sigma| \quad (C.4)$$

*) In diesem Anhang betrachten wir nur die Color-Freiheitsgrade der Zustände.

$$P_A = \sum_{x=1}^{N-1} |x\rangle \langle x| \quad (C.5)$$

Zwischen diesen Zuständen und den Zuständen $|q_n \bar{q}_p\rangle$ des $Q\bar{Q}$ -Systems haben wir die Amplituden

$$\langle q_n \bar{q}_p | z \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta_{np} \quad (C.6)$$

$$\langle q_n \bar{q}_p | x \rangle = \sqrt{2} (\lambda_x)_{np} \quad (C.7)$$

Mit diesen Amplituden können wir leicht die Projektionen der Operatoren Q_a und d_a berechnen. Für d_a ist

$$P_A d_a P_A = \sum_{x,y} |x\rangle \langle x| d_a |y\rangle \langle y| \quad (C.8)$$

wobei, nach (C.3)

$$\langle x | d_a | y \rangle = \sum_{\alpha\beta, \gamma\delta} \langle x | q_\alpha \bar{q}_\beta \rangle \left((\lambda_a)_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\gamma} (\lambda_a)_{\beta\delta} \right) \langle q_\gamma \bar{q}_\delta | y \rangle \quad (C.9)$$

ist. Mit (C.7) wird dann

$$\langle x | d_a | y \rangle = 2 \operatorname{Spur} \left(\lambda_x \{ \lambda_a, \lambda_y \} \right) = d_{xay} \quad (C.10)$$

so daß wir

$$P_A d_a P_A = \sum_{x,y} |x\rangle d_{xay} \langle y| \quad (C.11)$$

erhalten. Ebenso erhalten wir

$$P_S d_a P_A = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_y |z\rangle \delta_{ay} \langle y| \quad (C.12)$$

$$P_A d_a P_S = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_x |x\rangle \delta_{xa} \langle z| \quad (C.13)$$

und

$$P_3 d_a P_3 = 0 \quad (C.14)$$

Für Q_a erhalten wir

$$P_A Q_a P_A = i \sum_{xy} |x\rangle \{xay\} \langle y| \quad (C.15)$$

obei alle anderen Projektionen verschwinden. Wir stellen fest, daß der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator (3.15) keine Singlett $\longleftrightarrow$ Singlett-Projektion hat. Für den speziellen Fall einer $SU(2)$ -Gruppe ist $d_{xay} = 0$ und es folgt aus (C.11), daß $P_A d_a P_A = 0$. Die adjungierte $\longleftrightarrow$ adjungierte Projektion des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators in der temporalen Eichung (3.16) verschwindet demnach für eine $SU(2)$ Eichgruppe.

Mit den Relationen (C.12) und (C.13) berechnen wir

$$P_3 d_a P_A d_b P_3 = \frac{2}{N} S_{ab} P_3 \quad (C.16)$$

ein in (5.4) verwendetes Resultat.

Wir beschränken im folgenden unsere Betrachtung auf eine $SU(3)$ -Gruppe. Wir beweisen nun das in (5.18) verwendete Resultat, daß

$$P_3 d_{a_1} P_A d_{a_2} P_A d_{a_3} \dots P_A d_{a_n} P_3 F_{a_1} F_{a_2} F_{a_3} \dots F_{a_n} \quad (C.17)$$

für n gerade durch

$$2 \left(\frac{1}{3} F_a F_a \right)^{\frac{n}{2}} P_3 \quad (C.18)$$

und für n ungerade durch

$$2 \left(\frac{1}{3} F_a F_a \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{3} d_{bcd} F_b F_c F_d \right) \quad (C.19)$$

gegeben ist, wenn die F_a vertauschen. Verwenden wir (C.11), (C.12) und (C.13), so erhalten wir für (C.17)

$$\frac{2}{3} d_{a_1 a_2 x_2} d_{x_2 a_3 x_3} \dots d_{x_{n-1} a_n a_n} F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n} \quad (C.20)$$

Weiterhin verwenden wir, daß für SU(3) gilt

$$d_{abx} d_{xcy} F_a F_b F_c = \frac{1}{3} (F_a F_a) F_y \quad (C.21)$$

Indem wir nun diese Relation in (C.20) iterieren, erhalten wir (C.18) und (C.19).

Wir zeigen noch an, wie man die Relation (C.21)^{*)} ableitet. Es ist leicht zu berechnen, daß

$$\begin{aligned} \text{Spur } (\lambda_a F_a) &= 0 \\ \text{Spur } (\lambda_a F_a)^2 &= \frac{1}{2} (F_a F_a) \\ \text{Spur } (\lambda_a F_a)^3 &= \frac{1}{4} d_{abc} F_a F_b F_c \end{aligned} \quad (C.22)$$

und

$$\text{Spur } (\lambda_a F_a)^4 = \frac{1}{12} (F_a F_a)^2 + \frac{1}{8} d_{abx} d_{xcd} F_a F_b F_c F_d \quad (C.23)$$

Für SU(3) hat die Matrix $(\lambda_a F_a)$ drei Eigenwerte x_1, x_2, x_3 . Wir können eine Basis wählen, in der $(\lambda_a F_a)$ diagonal ist. Dann führt (C.22) zu Relationen zwischen den Eigenwerten, aus denen wir feststellen, daß sie durch die kubische Gleichung

$$x^3 - \frac{1}{4} (F_a F_a) x - \frac{1}{12} (d_{abc} F_a F_b F_c) = 0 \quad (C.24)$$

bestimmt sind. In der Basis, in der $(\lambda_j F_j)$ diagonal ist, kann diese Gleichung auch als Matrix-Gleichung geschrieben werden

$$(\lambda_j F_j) - \frac{1}{4} (F_a F_a) (\lambda_j F_j) - \frac{1}{12} (d_{abc} F_a F_b F_c) = 0 \quad (C.25)$$

*) Ich möchte mich hier bei D. Zeppenfeld bedanken, der mich auf diese Relation aufmerksam machte.

Diese Gleichung wird aber in jeder Basis gelten. Indem wir sie mit $(\lambda_g F_g)$ multiplizieren und die Spur nehmen, erhalten wir

$$\text{Spur} (\lambda_g F_g)^4 = \frac{1}{4} (F_a F_a) \text{Spur} (\lambda_g F_g)^2 = \frac{1}{8} (F_a F_a)^2 \quad (\text{C.26})$$

Durch Vergleich mit (C.23) erhalten wir

$$d_{abx} d_{xcd} F_a F_b F_c F_d = \frac{1}{3} (F_a F_a)^2 \quad (\text{C.27})$$

Indem wir die Ableitung bezüglich F_y in (C.27) bilden und die Symmetrieeigenschaften der d_{abc} verwenden, folgt die Relation (C.21).

ANHANG D

In diesem Anhang zeigen wir, daß der in (3.15) angegebene, nicht explizit eichinvariante Wechselwirkungs-Hamiltonoperator zu eichinvarianten Ergebnissen führt. Dies rechtfertigt dann die Verwendung der temporalen Eichung in (3.16).

Wir werden nun den Monopolterm $g Q_a A_a^0$ des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators (3.15) in die Rechnung mit einbeziehen. Die $Q\bar{Q}$ -System-Color-Matrizen Q_a haben, wie wir im Anhang C zeigen, nur eine adjungierte $\leftrightarrow$ adjungierte Projektion. Indem wir der Rechnung, die zur Zeitentwicklungsgleichung (4.16) führt folgen, sehen wir, daß demzufolge der Monopolterm nur im Kern (4.13) auftreten wird. Wir beschränken unsere Diskussion auf die erste Beschreibungsebene, in der die adjungierte adjungierte Projektion des Dipolterms des Wechselwirkungs-Hamiltonoperators nicht berücksichtigt wird. Dann erhalten wir für den Kern (4.13), mit $H_M = g Q_a A_a^0$

$$W(t-t') = \langle 0 | P_3 H_I P_A P_A e^{-i(H_A + H_S + H_M)(t-t')} P_A P_A H_I P_3 | 0 \rangle \quad (D.1)$$

Da H_A mit H_S und H_M vertauscht, kann $e^{-iH_A(t-t')}$ herausfaktoriisiert werden. Nun ist

$$e^{-i(H_S + H_M)(t-t')} = e^{-iH_S t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \prod_{m=1}^n e^{iH_S t_m} H_M e^{-iH_S t_m} \right) e^{iH_S t'} \quad (D.2)$$

und wir erhalten, indem wir

$$e^{iH_S t_m} H_M e^{-iH_S t_m} = H_M(t) = g Q_a A_a^0(t) \quad (D.3)$$

setzen und die explizite Form (3.15) für H_I und (3.2) für H_Q verwenden

$$W(t-t') = r_i e^{-i \left(\frac{p^2}{m} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_j}{r} \right) (t-t')} r_j \quad (D.4)$$

$$\frac{1}{4} g^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_3 d_a P_A \left(\prod_{m=1}^n Q_{b_m} \right) P_A d_c P_3 \langle 0 | E_i^a(t) \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \left(\prod_{m=1}^n A_{b_m}^0(t) \right) E_j^c(t') | 0 \rangle \right)$$

Dabei wurde verwendet, daß $e^{iH_0 t} |0\rangle = |0\rangle$ und $e^{iH_0 t} E_i^a e^{-iH_0 t} = E_i^a(t)$ gesetzt.

Nun verwenden wir, daß $[Q_a, d_b] = f_{abc} d_c$. Dann wird, da Q_a keine Singlett-Projektion hat,

$$Q_a P_A d_b P_3 = Q_a d_b P_3 = f_{abc} d_c P_3 \quad (D.5)$$

Indem wir diese Relation iterieren und (C.16) aus Anhang C verwenden, erhalten wir, für SU(3)

$$P_3 d_a P_A Q_{b_1} \dots Q_{b_m} P_A d_c P_3 = \frac{2}{3} P_3 f_{ab_1 x_1} f_{x_1 b_2 x_2} \dots f_{x_{m-1} b_m c} \quad (D.6)$$

Indem wir (D.6) in (D.4) einsetzen, erhalten wir für den Kern (D.1).

$$W(t-t') = r_i e^{-i \left(\frac{p^2}{m} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_j}{r} \right) (t-t')} r_j \cdot \langle 0 | E_i^a(t) \left(T e^{-i \int_{t'}^t d\tilde{t} f_{abc} A_b^0(\tilde{t})} \right) E_j^c(t') | 0 \rangle \quad (D.7)$$

wobei das Zeichen T die Zeitordnung bedeutet. Unter einer Eichtransformation bleibt der Vakuumerwartungswert invariant, da

$$T e^{-i \int_{t'}^t d\tilde{t} f_{abc} A_b^0(\tilde{t})} \quad (D.8)$$

wie eine Konnektion transformiert und der Vakuumzustand Lorentzinvariant ist.

ANHANG E

Wir lösen die Integrodifferentialgleichung (6.4)

$$i \frac{d}{dt} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle + i \gamma r^2 \int_{t_0}^t dt' e^{-i \left(\frac{4}{6} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) (t-t')} \langle S | U(t'-t_0) | S \rangle \quad (E.1)$$

$$\langle S | U(0) | S \rangle = 1$$

Wir definieren

$$V(t-t_0) = e^{i \left(\frac{4}{6} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) (t-t_0)} \langle S | U(t-t_0) | S \rangle \quad (E.2)$$

und erhalten

$$i \frac{d}{dt} V(t-t_0) = - \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) V(t-t_0) + i \gamma r^2 \int_{t_0}^t dt' V(t'-t_0) \quad (E.3)$$

$$V(0) = 1$$

Indem wir diese Gleichung einmal ableiten, erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2}{dt^2} V(t-t_0) = i \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \frac{d}{dt} V(t-t_0) + \gamma r^2 V(t-t_0) \quad (E.4)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$V(0) = 1$$

$$\left. \frac{d}{dt} V(t-t_0) \right|_{t=t_0} = i \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \quad (E.5)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt, unter Verwendung von (E.2), das in (6.5) angegebene Resultat für $\langle S | U(t-t_0) | S \rangle$.

ANHANG F

Wir lösen die Integrodifferentialgleichung (6.18)

$$i \frac{d}{dt} \langle s | U(t-t_0) | s \rangle = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \langle s | U(t-t_0) | s \rangle + i \gamma r^2 \int_{t_0}^t dt' e^{-i \left(\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) (t-t')} \cos \left(\sqrt{\frac{4}{3} \tilde{\gamma} r^2} (t-t') \right) \langle s | U(t-t_0) | s \rangle \quad (F.1)$$

$$\langle s | U(0) | s \rangle = 1$$

Wir definieren

$$V(t-t_0) = e^{i \left(\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) (t-t_0)} \langle s | U(t-t_0) | s \rangle \quad (F.2)$$

und erhalten

$$i \frac{d}{dt} V(t-t_0) = - \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) V(t-t_0) + i \gamma \int_{t_0}^t dt' \cosh \left(\sqrt{\frac{4}{3} \tilde{\gamma} r^2} (t-t') \right) V(t'-t_0) \quad (F.3)$$

Wir leiten diese Gleichung zweimal ab. Dies ergibt

$$i \frac{d^3}{dt^3} V(t-t_0) = - \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \frac{d^2}{dt^2} V(t-t_0) + i \gamma r^2 \frac{d}{dt} V(t-t_0) + i \gamma r^2 \left(\frac{4}{3} \tilde{\gamma} r^2 \right) \int_{t_0}^t dt' \cosh \left(\sqrt{\frac{4}{3} \tilde{\gamma} r^2} (t-t') \right) V(t'-t_0) \quad (F.4)$$

Wir multiplizieren nun (F.3) mit $\frac{4}{3} \tilde{\gamma} r^2$ und ziehen es von (F.4) ab. Damit erhalten wir eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$i \frac{d^3}{dt^3} V(t-t_0) + \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \frac{d}{dt^2} V(t-t_0) - i \left(\gamma + \frac{4}{3} \tilde{\gamma} \right) r^2 \frac{d}{dt} V(t-t_0) + \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha_s}{r} + \gamma \right) \left(\frac{4}{3} \tilde{\gamma} r^2 \right) V(t-t_0) = 0 \quad (F.5)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$V(0) = 1$$

$$i \frac{d}{dt} V(t-t_0) \Big|_{t=t_0} = - \left(\frac{3}{2} \frac{\kappa_s}{r} + \gamma \right) \quad (\text{F.6})$$

$$i \frac{d^2}{dt^2} V(t-t_0) \Big|_{t=t_0} = -i \left(\frac{3}{2} \frac{\kappa_s}{r} + \gamma \right) + i \gamma r^2$$

Ihre Lösung ist

$$V(t-t_0) = \kappa_1 e^{-i\beta_1(t-t_0)} + \kappa_2 e^{-i\beta_2(t-t_0)} + \kappa_3 e^{-i\beta_3(t-t_0)} \quad (\text{F.7})$$

wobei β_1 , β_2 und β_3 als Wurzeln der entsprechenden algebraischen Gleichung dritter Ordnung bestimmt werden und κ_1 , κ_2 und κ_3 dann durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Für $\gamma = \tilde{\gamma}$ und die vorgegebenen Werte der anderen Parameter ergibt sich, daß κ_1 und β_1 reell sind, während κ_2 , β_2 , κ_3 und β_3 komplex sind, mit $\kappa_3 = \kappa_2^*$ und $\beta_3 = \beta_2^*$. Damit ist, bei Verwendung von (F.2), die Lösung der Integrodifferentialgleichung (F.1) durch

$$\langle s | U(t-t_0) | s \rangle = \tilde{c}_1 e^{-i\tilde{E}_1(t-t_0)} + \tilde{c}_2 e^{-i\tilde{E}_2(t-t_0)} + \tilde{c}_2^* e^{-i\tilde{E}_2^*(t-t_0)} \quad (\text{F.8})$$

gegeben. Dabei sind $\tilde{c}_1$ und $\tilde{E}_1$ reell und wurden in den Abbildungen 5 und 6 dargestellt, ebenso wie die Realteile von $\tilde{c}_2$ und $\tilde{E}_2$. Die Imaginärteile von $\tilde{c}_2$ und $\tilde{E}_2$ wurden in den Abbildungen 7 und 8 dargestellt*).

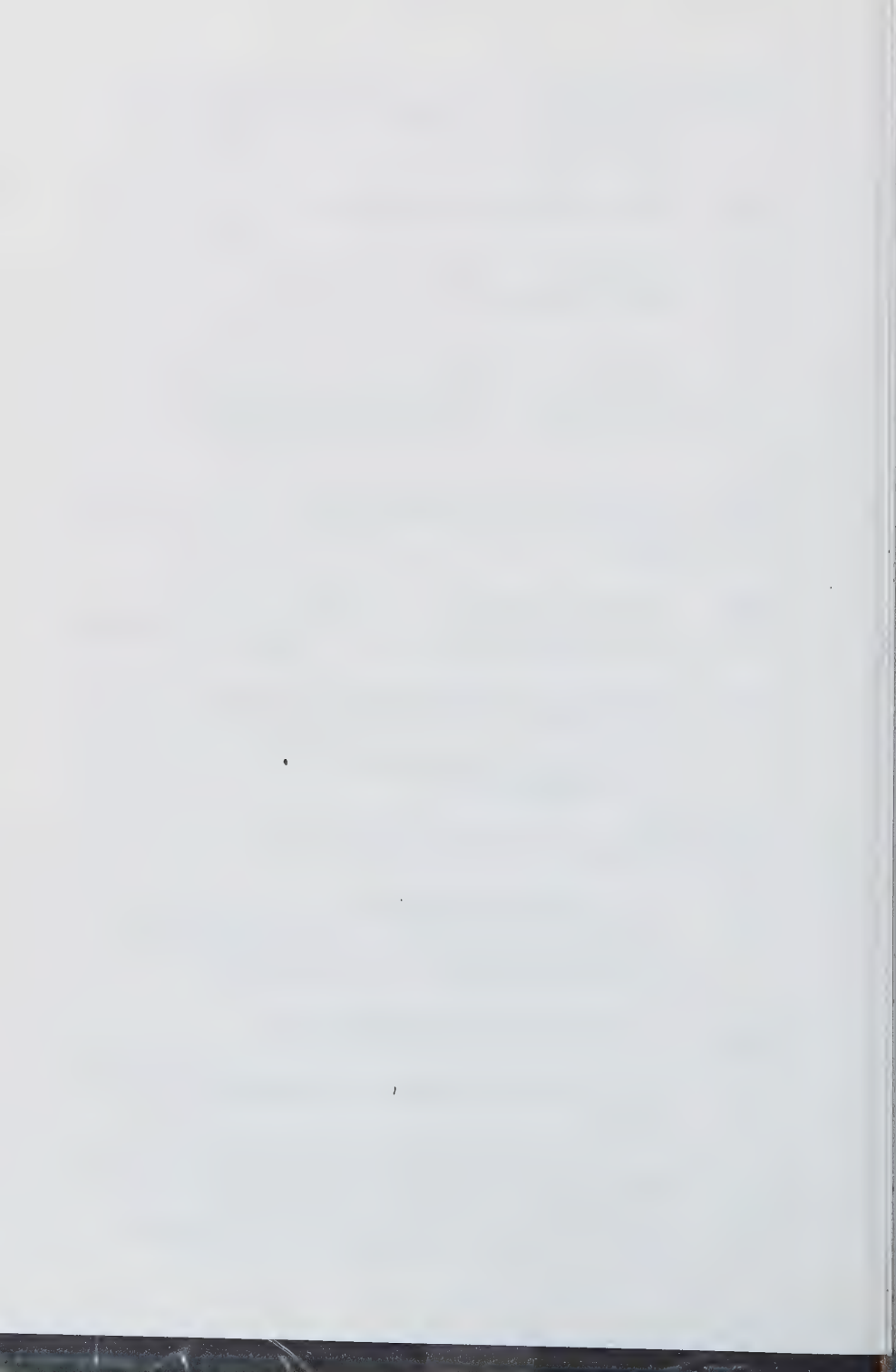
*) Die diesen Größen entsprechenden algebraischen Ausdrücke könnten explizit angegeben werden. Da sie aber lang und unübersichtlich sind, wurden sie numerisch ausgewertet und nur graphisch dargestellt.

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) Für einen Übersichtsartikel siehe:
H.D. Politzer, Phys. Rep. 14C (1974) 129;
W. Marciano und H. Pagels, Phys. Rep. 36C (1978) 137;
H. Fritzsch, Chromodynamic Theory of Hadrons, Acta Phys. Austr., Suppl. XIX (1978) 249.
- (2) G. 't Hooft, unveröffentlicht;
D. Gross und W. Wilcezek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343;
H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1983) 1346;
H.D. Politzer, Phys. Rep. 14C (1974) 129.
- (3) Für einen Übersichtsartikel siehe:
E. Reya, Phys. Rep. 69 (1981) 197.
- (4) J.B. Kogut, Rev. of Modern Phys. 55 (1983) 775;
J. Gilchrist, H. Schneider, G. Schierholz und M. Teper, DESY Preprint 83-094, 1983.
- (5) Siehe z.B.:
S.L. Adler and R.F. Dashes, in: Current Algebras, W.A. Benjamin Inc., New York, 1968.
- (6) N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D19 (1979) 2653.
- (7) Für einen Übersichtsartikel siehe:
P. Hasenfratz und J. Kuti, Phys. Rep. 40 (1978) 75.
- (8) Für einen Übersichtsartikel siehe:
C. Quigg und J.L. Rosner, Phys. Rep. 56 (1979) 167;
M. Krammer und H. Kraseman, Acta Phys. Austr., Suppl. XX (1979) 259;
H. Grosse und A. Martin, Phys. Rep. 60 (1980) 341.
- (9) Siehe z.B.:
L.S. Brown and W.I. Weisberger, Phys. Rev. D20 (1979) 3239.

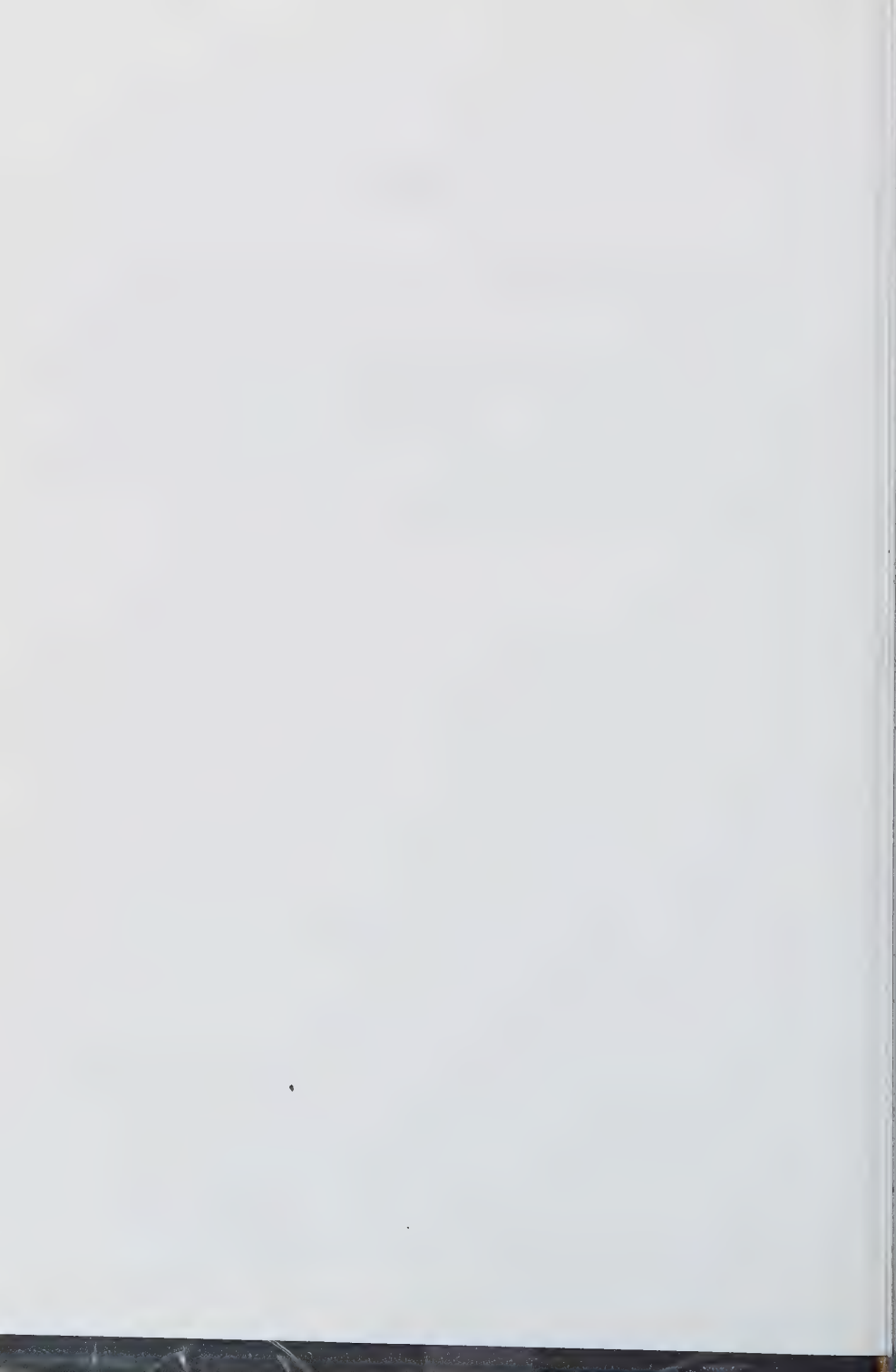
- (10) Review of Particle Properties, Rev. of Modern Phys. 52
(1980) 51.
- (11) C. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Rev. D17 (1978)
2717.
- (12) M.A. Shifman, A.I. Vainshtein and V.I. Zakharov, Nucl. Phys.
B147 (1979) 385 und 448.
- (13) B. Guberina, R. Meckbach, R.D. Peccei und R. Rückl, Nucl.
Phys. B184 (1981) 476.
- (14) M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, M.B. Voloshin and V.I. Zakharov,
Phys. Lett. 77B (1978) 80;
L.J. Reinders, H.R. Rubinstein and S. Yazaki, Nucl. Phys.
B186 (1981) 109.
- (15) W. Buchmüller und S.H.H. Tye, Phys. Rev. D24 (1981) 132.
- (16) A.Soni and M.D. Tran, Phys. Lett. B109 (1982) 393.
- (17) C.A. Flory, Phys. Lett. B113 (1982) 263.
- (18) R.A. Bertlman and J.S. Bell, Nucl. Phys. B227 (1983) 435.
- (19) H. Leutwyler, Phys. Lett. B98 (1981) 447.
- (20) M.B. Voloshin, Nucl. Phys. B154 (1979) 365.
- (21) M.B. Voloshin, preprint ITEP-30 (1981).
- (22) T.M. Yan, Phys. Rev. D22 (1980) 1652.
- (23) M. Peskin, Nucl. Phys. B156 (1979) 365;
K. Shizuya, Phys. Rev. D23 (1981) 1180.

- (24) D.J. Gross and A. Neven, Phys. Rev. D10 (1974) 3235;
C.G. Callan, R.F. Dashen and D.J. Gross, Phys. Rev.
D17 (1978) 2717.
- (25) A. Martin, Phys. Lett. 93B (1980) 338.
- (26) W. Buchmüller, G. Grunberg and S.H.H. Tye, Phys. Rev.
Lett. 45 (1980) 103.
- (27) G. Bhanot and S. Rudaz, Phys. Lett. 78B (1978) 119.
- (28) E. Eichten et al., Phys. Rev. D17 (1978) 3090, und
D21 (1980) 203.
- (29) M. Gell-Mann, R.J. Oakes and B. Renner, Phys. Rev. 175 (1968)
2195.
- (30) R. Crewther, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 1421;
M.S. Chanowitz and J. Ellis, Phys. Lett. 40B (1972) 397.
- (31) S.L. Adler, J.C. Collins and A. Duncan, Phys. Rev. D15
(1977) 1712;
J.C. Collins, A. Duncan and S. D. Joglekar, Phys. Rev.
D16 (1977) 438.
- (32) H. Leutwyler, unveröffentlicht.
- (33) A. Di Giacomo and G. Rossi, Phys. Lett. 100B (1981) 481;
T. Banks, R. Horsley, H.R. Rubinstein and U. Wolff,
Weizmann Inst. of Science preprint W15-81/8.
- (34) K. Wilson, Phys. Rev. 179 (1969) 1499.
- (35) S.N. Nicolaev and A. Radyushkin, Dubna preprint E2-82-521
(1982).
- (36) K. Nagy, Nuovo Cim. Suppl. 17 (1960) 92.
- (37) N. Nakanishi, Suppl. Prog. Theor. Phys. 51 (1972) 1.



DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich meinem Lehrer, Herrn Dr. R.D. Peccei, für seine Hilfe, für wertvolle Diskussionen und für seine Ermutigungen danken. Bei Professor Dr. F. Wagner bedanke ich mich für sein Interesse und für intensive und hilfreiche Diskussionen. Für die wichtigen täglichen Diskussionen danke ich meinen Kollegen am Werner Heisenberg-Institut für Physik des Max Planck-Instituts für Physik und Astrophysik in München. Bei Frau C. Maseko möchte ich mich herzlich für die Anfertigung der Reinschrift der Arbeit bedanken.



LEBENS LAUF

Am 22. November 1947 wurde ich in Bad Soden/Taunus als Sohn des Physikers Dr. Wolfgang Meckbach und seiner Ehefrau Gabriele Meckbach, geborene Mack, geboren.

Im Jahre 1950 übersiedelte ich mit meinen Eltern nach Argentinien, wo ich die Schule bis zum Abitur besuchte. Im Jahre 1967 kehrte ich nach Deutschland zurück und legte am Goethe-Gymnasium in Frankfurt eine Abiturergänzungsprüfung ab.

Im Sommersemester 1967 begann ich das Studium der Physik an der Universität Frankfurt und legte 1969 dort das Vordiplom ab.

Im Wintersemester 1970/71 setzte ich mein Studium an der Universität Tübingen fort. Dort fertigte ich unter Anleitung von Professor Dr. H. Mitter meine Diplomarbeit mit dem Thema "Zur Lösung der Klein-Gordon-Gleichung für Teilchen in stehenden Wellenfeldern" an. Im Frühjahr 1978 legte ich die Diplomprüfung für Physik ab.

In die Zeit von 1977 bis 1979 fiel eine zweijährige Mitarbeit bei dem Forschungsprojekt CUS (Computer-unterstützte Simulation im naturwissenschaftlichen Hochschulunterricht) beim Zentrum für neue Lernverfahren der Universität Tübingen.

Seit Mai 1979 bin ich Doktorand am Werner Heisenberg-Institut für Physik im Max Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München.

